



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Belém-Pará

2010



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**Potenciais pseudo-newtonianos e a radiação escalar
emitida por uma fonte girando ao redor de um
objeto estelar**

Jaime Luis Cardoso da Cruz Filho
Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Belém-Pará

2010

Potenciais pseudo-newtonianos e a radiação escalar emitida por uma fonte girando ao redor de um objeto estelar

Jaime Luis Cardoso da Cruz Filho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Banca Examinadora

Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino (Orientador)

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes (Membro Externo)

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves (Membro Interno)

Belém-Pará

2010

Resumo

Potenciais pseudo-newtonianos e a radiação escalar emitida por uma fonte girando ao redor de um objeto estelar

Jaime Luis Cardoso da Cruz Filho

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

Neste trabalho usamos os potenciais pseudo-newtonianos propostos por Paczyński e Wiita, Nowak e Wagoner e Artemova et al. para calcular a radiação escalar emitida por uma fonte em movimento circular e uniforme ao redor de um objeto estelar. Comparamos os resultados obtidos nessa abordagem com os resultados encontrados via teoria quântica de campos no espaço-tempo de Schwarzschild. Obtemos que, do infinito até a órbita circular marginalmente estável ($R = 6M$) o potencial que melhor reproduz os resultados de Schwarzschild é o de Nowak e Wagoner. Já entre esta órbita e a última órbita circular instável ($R = 3M$) nenhum dos potenciais pseudo-newtonianos produz resultados satisfatórios, e o potencial newtoniano mostra-se como a melhor aproximação. O potencial de Paczyński e Wiita, o mais utilizado na literatura para analisar discos de acreção, gerou os resultados menos satisfatórios em nossa análise.

Belém-Pará

2010

*Abstract*Pseudo-newtonian potentials and scalar radiation
emitted by a source swirling around a estelar object

Jaime Luis Cardoso da Cruz Filho

Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino

We use the pseudo-newtonian potentials proposed by Paczyński and Wiita, Nowak and Wagoner and Artemova et al. to calculate the scalar radiation emitted by a source in uniform circular motion around a stellar object. We compare the results obtained in this approach with the results obtained via quantum field theory in Schwarzschild spacetime. We find that, up to the marginally stable circular orbit ($R = 6M$) the potential that better reproduces the Schwarzschild result is the Nowak and Wagoner one. Between this orbit and the last unstable circular orbit ($R = 3M$) neither one of the pseudo-newtonian potentials produce satisfactory results, and the newtonian potential turns out to be the best approximation. The Paczyński and Wiita potential, the most used in the literature to analyze accretion disks, generates the less satisfactory results for this situation.

Belém-Pará

2010

“Dedico este trabalho a dois grandes ícones da música que transformaram minha maneira de pensar, e certamente personificam as idéias de persistência, liderança, competência e sensibilidade, características fundamentais para uma verdadeira transformação em nossa sociedade: Michael Phillip Jagger e James Paul McCartney.”

*Follow your steps and you will find
The unknown ways are in your mind
Need nothing else than just your pride
to get there...*

Trecho da música "Carry On", do grupo Angra

Agradecimentos

As pessoas que menciono a seguir são fundamentais em minha vida, por isso agradeço a todas por me acompanharem, me ajudarem, me alegrarem, enfim, por viverem ao meu lado, a saber: Valdenice, Jaime, Júlio, Jader, Enderson, Emerson, Fernando, Kennedy e Alan. Espero sempre estar com vocês.

- Minha família é muito importante em minha vida. Agradeço a meus pais: Valdenice e Jaime, e a meus irmãos: Júlio e Jader por serem meu alicerce. Obrigado por tudo. Minha luta sempre será por vocês.
- Amigos são irmãos que encontramos no decorrer da vida. Tenho amigos fantásticos, tanto nos momentos felizes quanto nos momentos tristes. Pra mim vocês são “os caras”!

Enderson, amigo de longa data, obrigado por participar da minha vida por tanto tempo, por estar presente em praticamente todas as minhas vitórias e derrotas. Muito do que penso devo a você, meu amigo-irmão.

Emerson, meu parceiro, companheiro e amigo-irmão. Somos tão iguais e tão diferentes. Obrigado por me fazer viver verdadeiramente, afinal, a maioria dos momentos em que me senti invencível e sem limites foi ao teu lado. Obrigado por várias vezes me desligar desta vida sem graça e me conduzir à Vida Real.

Fernando, Manão, é a pessoa que sempre me mostra um ponto de vista diferente. Obrigado pelas diversões e ensinamentos. Mesmo um pouco afastado, sempre será um amigo. Valeu Manão.

Kennedy, nunca lhe disse isso, mas o considero um irmão mais velho. Para mim, mesmo com tantas brincadeiras, você é uma pessoa muito madura nos atos e nas palavras. Obrigado pelas alegrias, brincadeiras e pelo companheirismo.

Alan, Mano Brow, obrigado por ser um amigo tão presente em minha vida, dividindo alegrias, angústias, vitórias, derrotas e muitas contas... Acho que somos muito parecidos no comportamento, no pensamento, nas atitudes e outros. Obrigado por todos os ensinamentos, meu amigo.

- Trabalho a quase três anos em uma escola maravilhosa - E.E.E.F.M. Prof. Paulo Cesar Coutinho Rodrigues - CAIC. Amo esta escola com tanta intensidade que a vejo como

minha casa. Parcela considerável desse sentimento deve-se a pessoas inigualáveis que encontrei: Zenaira, Florzinha e Masaru. Obrigado por me ensinarem, através de seus atos, o significado de palavras como competência, dedicação, compromisso e amizade. Vocês são exemplos de servidores públicos, e personificam completamente a palavra amigo.

- Agradeço à Débora e família por me ajudarem em praticamente todo meu mestrado.
- Recentemente comecei a praticar um esporte que a muito desejava: ciclismo. Todas as vezes que pedalo realizo um sonho. Assim, agradeço a minha galera da “Bikes em Trilhas”, representada pelos parceiros Ismar, Hugo e Gisele, por realizar este sonho.
- Agradeço aos companheiros de mestrado Penn Lee, Elaine, Carlos André, João Paulo, Leandro, Alex e outros pelas brincadeiras, diversões e contribuições para minha formação em física.
- Agradeço aos eternos amigos-professores Marcelo Lima e Sérgio Vizeu por contribuírem com minha formação como físico e como ser humano.
- Agradeço ao Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino por me orientar, por me mostrar seu profissionalismo e pela sua imensa paciência. Desculpe minhas brincadeiras e por não personificar sua idéia de aluno-padrão.

Sumário

1	Introdução	9
2	Potenciais pseudo-newtonianos	11
2.1	Idéias gerais e definições	11
2.2	Grandezas uteis	12
2.3	Análise das órbitas	15
2.3.1	As órbitas no espaço-tempo de Schwarzschild	15
2.3.2	Órbitas segundo o potencial newtoniano e os pseudo-newtonianos	19
3	Radiação escalar no espaço-tempo de Minkowski	27
3.1	Quantização do campo escalar no espaço-tempo de Minkowski	27
3.2	Potência emitida por uma fonte orbitando um objeto estelar no espaço-tempo de Minkowski	30
3.3	Potência emitida nos casos newtoniano e pseudo-newtonianos	32
3.3.1	Potencial newtoniano	33
3.3.2	Potencial de Paczyński e Wiita	33
3.3.3	Potencial de Nowak e Wagoner	34
3.3.4	Potenciais de Artemova et al.	34
3.4	Resultados	35
4	Radiação escalar no espaço-tempo de Schwarzschild	39
4.1	Quantização do campo de Klein-Gordon no espaço-tempo de Schwarzschild	39
4.2	Forma assintótica normalizada dos modos $u_{\omega l m}$	43
4.3	A potência emitida usando TQC em Schwarzschild	44
4.3.1	Expressão analítica da potência emitida	44

4.3.2	Cálculo numérico da potência emitida	46
4.4	Comparação entre potências em Schwarzschild e em Minkowski	49
5	Conclusões e perspectivas	51
A	Demonstração da equação (3.37)	53
B	O resultado (3.38) via função de Green	56

Capítulo 1

Introdução

No ano de 1916, Albert Einstein propôs uma teoria para englobar efeitos gravitacionais na teoria da relatividade. Esta teoria ficou conhecida como teoria da relatividade geral. Nessa abordagem a interação gravitacional passou a ser entendida como consequência da estrutura geométrica do espaço-tempo.

Alguns meses após à proposição de Albert Einstein, o físico Karl Schwarzschild encontrou uma solução da equação de Einstein para o vácuo, com simetria esférica, a qual denominou-se solução de Schwarzschild [1]. Tal solução possibilitou o entendimento de alguns resultados que não podem ser explicados pela gravitação newtoniana.

Uma das principais consequências da solução de Schwarzschild são os buracos negros [2]. Apesar da evidência indireta da existência de buracos negros supermassivos no centro de algumas galáxias [3], a verificação experimental direta desses objetos ainda não foi realizada. Na busca de uma evidência observacional definitiva, o estudo da radiação emitida por partículas orbitando objetos centrais tornou-se muito importante (ver referências em [4]), uma vez que esta pode ser afetada pela presença de buracos negros.

No início da década de 1980 foi proposto por B. Paczyński e P. J. Wiita [5] uma forma de se reproduzir, sem o uso da relatividade geral, algumas características do espaço-tempo de Schwarzschild, a saber: as órbitas circulares marginalmente ligada e estável. Tal abordagem é realizada assumindo que a interação gravitacional entre os corpos ocorre por meio de uma força no espaço plano, descrita por meio de potenciais que ficaram conhecidos como *pseudo-newtonianos*.

Esses potenciais, basicamente modificações do potencial newtoniano, surgiram para facilitar

a análise de discos de acreção ao redor de buracos negros de Schwarzschild [5]. Mesmo com a posterior extensão desta idéia para simular efeitos relativísticos de espaços-tempos com rotação [6, 7], e a aplicação desses potenciais para analisar situações envolvendo modelos caóticos [8, 9], a utilização deles ainda é muito restrita a análise de discos de acreção [10, 11].

Dentre os potenciais propostos para reproduzir as características das órbitas circulares do espaço-tempo de Schwarzschild, o potencial de Paczyński e Wiita se destaca por sua simplicidade e exatidão [12]. Tal potencial consegue reproduzir exatamente a órbita circular marginalmente estável ($R \equiv 6M$), e a órbita circular marginalmente ligada ($R \equiv 4M$) para uma partícula girando ao redor de um buraco negro de Schwarzschild, e por isso é o mais utilizado na literatura.

Com o objetivo de confirmar a adequação dos potenciais pseudo-newtonianos no caso específico da emissão de radiação por uma partícula em movimento circular e uniforme ao redor de um buraco negro de Schwarzschild, usaremos, além do potencial de Paczyński e Wiita, os potenciais propostos por Nowak e Wagoner [13] e Artemova et al. [14].

No capítulo 2, faremos uma apresentação detalhada dos potenciais pseudo-newtonianos, suas características, as grandezas relacionadas a cada potencial, bem como sua adequação na análise das órbitas circulares ao redor de um objeto central. No capítulo 3, calcularemos, via teoria quântica de campos, a potência emitida por uma fonte em movimento circular ao redor de um objeto central no espaço-tempo de Minkowski, assumindo interações newtoniana e pseudo-newtonianas. No capítulo 4 calcularemos a potência emitida por uma fonte girando ao redor de um buraco negro de Schwarzschild. Ainda no capítulo 4, compararemos os resultados obtidos com as diferentes abordagens deste trabalho. Finalizamos esta dissertação apresentando nossas conclusões e perspectivas no capítulo 5.

Capítulo 2

Potenciais pseudo-newtonianos

2.1 Idéias gerais e definições

Na tentativa de incorporar correções relativísticas a fenômenos gravitacionais, ainda sem considerar a teoria da relatividade geral, foi proposta a utilização de potenciais pseudo-newtonianos [5, 13, 14], os quais são modificações do potencial de Newton, a saber:

$$\varphi_{New}(r) = -\frac{M}{r} , \quad (2.1)$$

escrito aqui em unidades naturais, nas quais fazemos a constante da gravitação universal de Newton igual a unidade $G = 1$. Na Eq. (2.1) M é a massa do objeto central.

Como mostraremos a seguir, alguns desses potenciais conseguem reproduzir com boa aproximação algumas características do espaço-tempo de Schwarzschild.

Apesar de alguns autores já terem proposto potenciais para simular espaços-tempos com rotação [6, 7], nos restringiremos ao espaço-tempo estático e esfericamente simétrico de Schwarzschild.

B. Paczyński e P. J. Wiita sugeriram um potencial gravitacional com o intuito de reproduzir as órbitas circulares marginalmente estável e ligada, segundo a relatividade geral. Em unidades naturais, tal potencial é dado por [5]:

$$\varphi_{PW}(r) = -\frac{M}{r - R_S} , \quad (2.2)$$

em que $R_S = 2M$ é o raio de Schwarzschild (em unidades naturais). O termo R_S é responsável pela simulação de efeitos relativísticos desse espaço-tempo curvo.

Nowak e Wagoner [13] e Artemova et al. [14] propuseram outros potenciais pseudo-newtonianos. O potencial de Nowak e Wagoner foi proposto para reproduzir o valor correto da velocidade angular de uma partícula na órbita circular marginalmente estável ($R = 6M$) [14]. Os potenciais de Artemova foram propostos para obter as mesmas acelerações de uma partícula teste em queda no espaço-tempo de Schwarzschild [14]. Tais potenciais são dados, respectivamente, por:

$$\varphi_{NW}(r) = -\frac{M}{r} \left[1 - 3\frac{M}{r} + 12\frac{M^2}{r^2} \right], \quad (2.3)$$

$$\varphi_{Art_1}(r) = -1 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2}, \quad (2.4)$$

e

$$\varphi_{Art_2}(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (2.5)$$

Na Fig. 2.1 mostramos um gráfico dos potenciais φ_i , incluindo o newtoniano, em função de r/M . Percebe-se que distante do centro atrator todos tendem a zero. Usamos o índice i para representar os diferentes potenciais estudados aqui (Newton, Paczyński e Wiita, Nowak e Wagoner e Artemova et al.). O potencial newtoniano é o de menor módulo até $r = 4M$ (órbita circular marginalmente ligada segundo a relatividade geral). A partir desta órbita, o potencial de Nowak e Wagoner torna-se o de menor módulo. O potencial de Paczyński e Wiita é o de maior módulo para todos os pontos.

2.2 Grandezas uteis

A partir dos potenciais definidos na seção anterior, podemos determinar algumas grandezas que serão úteis na análise do movimento de uma partícula em órbita circular ao redor de um objeto estelar.

A primeira destas grandezas é a força por unidade de massa (da partícula de prova), f_i , que é igual a derivada do potencial pseudo-newtoniano, multiplicada por menos um [15]. Na Fig. 2.2 vemos como cada força varia como função de R/M , em que R é o raio de órbita circular. A força com maior módulo é a relacionada ao potencial de Paczyński e Wiita. Para as órbitas $R > 6M$ a força de menor módulo é a relacionada ao potencial de Nowak e Wagoner, já para as órbitas $2M < R < 6M$ a força associada ao potencial de Newton é a de menor módulo.

Outra grandeza útil é a velocidade tangencial para órbitas circulares, a qual é encontrada simplesmente igualando-se os módulos da forças pseudo-newtonianas com o módulo da força

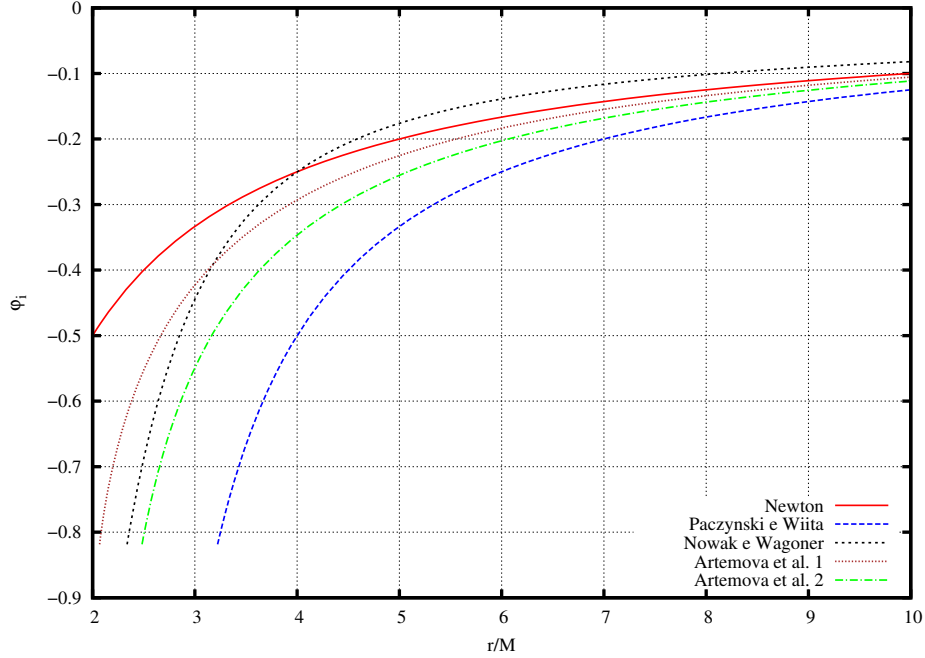


Figura 2.1: Os potenciais de Newton e os pseudo-newtonianos de Paczyński e Wiita, de Nowak e Wagoner e de Artemova et al. como função de r/M .

centrípeta [15]:

$$\begin{aligned}
 |f_i| &= |f_{cp}| \quad \therefore \\
 m \left. \frac{d\varphi_i}{dr} \right|_{r=R} &= m \frac{v_i^2}{R} \quad \therefore \\
 v_i(R) &= \left(R \left. \frac{d\varphi_i}{dr} \right|_{r=R} \right)^{1/2}. \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

A velocidade angular no movimento circular é dada por [15]:

$$\begin{aligned}
 \Omega_i &= \frac{v_i}{R} \quad \therefore \\
 \Omega_i(R) &= \left(\frac{1}{R} \left. \frac{d\varphi_i}{dr} \right|_{r=R} \right)^{1/2}, \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

em que v_i é dada por (2.6).

Para encontrarmos o momento angular por unidade de massa no movimento circular basta usarmos (2.7) e a seguinte relação [15]

$$\begin{aligned}
 L_i &= R^2 \Omega_i \quad \therefore \\
 L_i(R) &= \left(R^3 \left. \frac{d\varphi_i}{dr} \right|_{r=R} \right)^{1/2}. \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

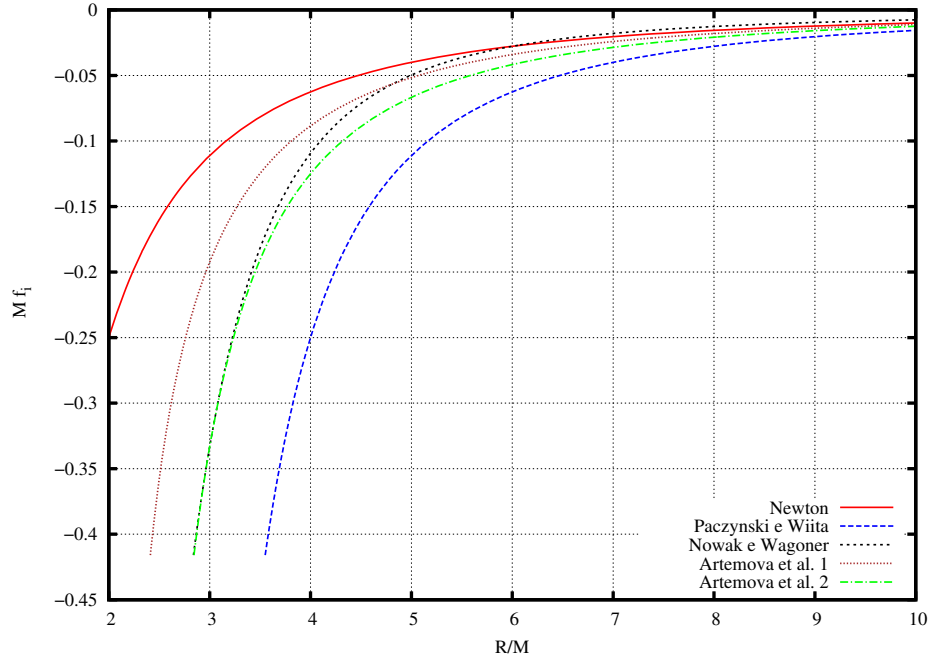


Figura 2.2: As forças newtoniana e pseudo-newtonianas de Paczyński e Wiita, de Nowak e Wagoner e de Artemova et al. como função de R/M .

Na Tab. 2.1 mostramos as grandezas acima para cada potencial, incluindo o newtoniano. Essas mesmas grandezas são plotadas nas Figs. 2.3, 2.4, 2.5 para cada potencial.

Potenciais	Fator	$v(R)$	$\Omega(R)$	$L(R)$
Newton	$\lambda = 1$	$\left(\frac{M}{R}\right)^{1/2} \lambda$	$\left(\frac{M}{R^3}\right)^{1/2} \lambda$	$(MR)^{1/2} \lambda$
Paczyński e Wiita	$\zeta = \frac{R}{R-2M}$	$\left(\frac{M}{R}\right)^{1/2} \zeta$	$\left(\frac{M}{R^3}\right)^{1/2} \zeta$	$(MR)^{1/2} \zeta$
Nowak e Wagoner	$\psi = \left(1 - \frac{6M}{R} + \frac{36M^2}{R^2}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{M}{R}\right)^{1/2} \psi$	$\left(\frac{M}{R^3}\right)^{1/2} \psi$	$(MR)^{1/2} \psi$
Artemova et al. 1	$\xi = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/4}$	$\left(\frac{M}{R}\right)^{1/2} \xi$	$\left(\frac{M}{R^3}\right)^{1/2} \xi$	$(MR)^{1/2} \xi$
Artemova et al. 2	$\tau = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2}$	$\left(\frac{M}{R}\right)^{1/2} \tau$	$\left(\frac{M}{R^3}\right)^{1/2} \tau$	$(MR)^{1/2} \tau$

Tabela 2.1: Expressões de grandezas importantes no movimento orbital circular de uma partícula girando ao redor um objeto estelar.

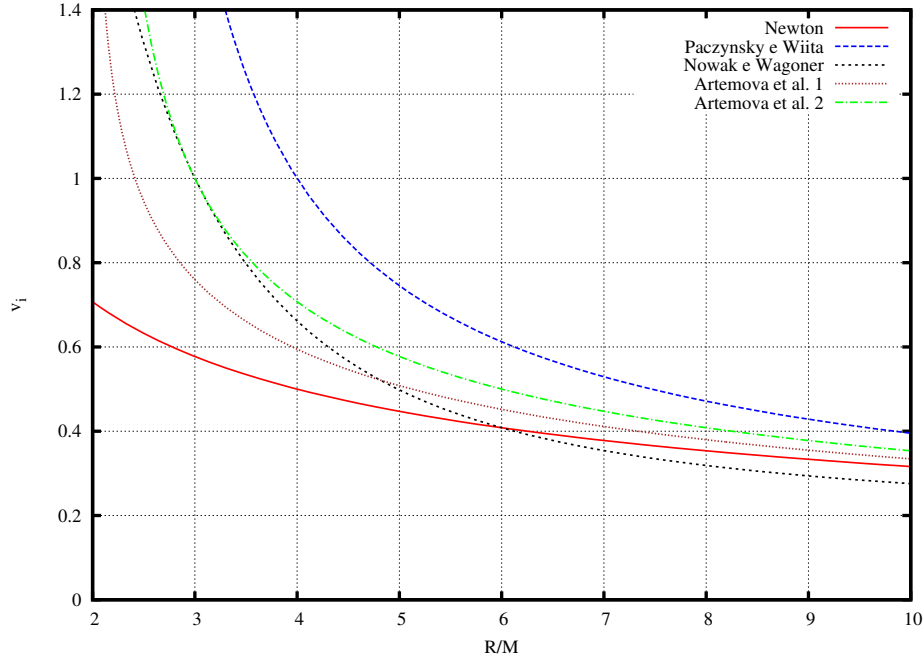


Figura 2.3: Velocidades tangenciais da partícula, como função de R/M , assumindo diferentes interações, a saber: newtoniana, de Paczyński e Wiita, de Nowak e Wagoner e de Artemova et al.

2.3 Análise das órbitas

Nesta seção utilizaremos os potenciais pseudo-newtonianos para analisar a estrutura orbital de uma partícula girando ao redor de um objeto central. Em particular, mostraremos como esses potenciais podem ser usados para obter as órbitas circulares marginalmente estável e ligada para uma partícula em movimento circular ao redor de um buraco negro de Schwarzschild.

2.3.1 As órbitas no espaço-tempo de Schwarzschild

Em nossa análise assumiremos que a fonte $j(x^\alpha)$, com massa de repouso m e 4-velocidade

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad (2.9)$$

orbita um buraco negro de Schwarzschild ao longo de uma geodésica no plano equatorial ($\theta = \pi/2$). A equação $u^\alpha u_\alpha = 1$, no caso do movimento equatorial na geometria de Schwarzschild, reduz-se a [2]

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 1. \quad (2.10)$$

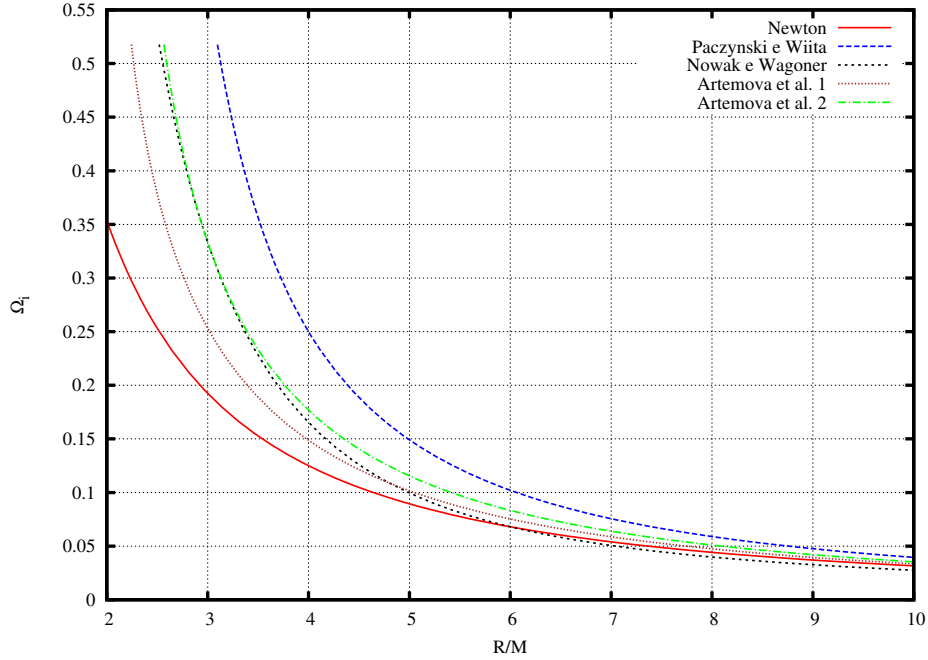


Figura 2.4: Velocidades angulares da partícula, como função de R/M , assumindo diferentes interações, a saber: newtoniana, de Paczyński e Wiita, de Nowak e Wagoner e de Artemova et al.

Como a fonte está seguindo uma geodésica, temos que a energia total (incluindo a potencial gravitacional) por unidade de massa de repouso da fonte (E) e o momento por unidade de massa de repouso da fonte (L), com relação a um observador estático no infinito, a saber

$$E = g_{\alpha\beta}\xi^\alpha u^\beta = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right), \quad (2.11)$$

$$L = -g_{\alpha\beta}\psi^\alpha u^\beta = r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right), \quad (2.12)$$

respectivamente, são duas constantes de movimento. Nessas equações temos que $\xi^\alpha = (\partial/\partial t)^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ denota o campo de Killing estático tipo-tempo, e $\psi^\alpha = (\partial/\partial\phi)^\alpha = (0, 0, 0, 1)$ denota o campo de Killing rotacional tipo-espaco.

Substituindo (2.11) e (2.12) em (2.10), encontramos a equação da geodésica para a fonte massiva $j(x^\alpha)$ no espaço-tempo de Schwarzschild, em movimento no plano equatorial, dada por

$$\frac{1}{2}E^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (2.13)$$

Ressalte-se que esta equação é análoga à de uma partícula de massa unitária, com energia $E^2/2$,

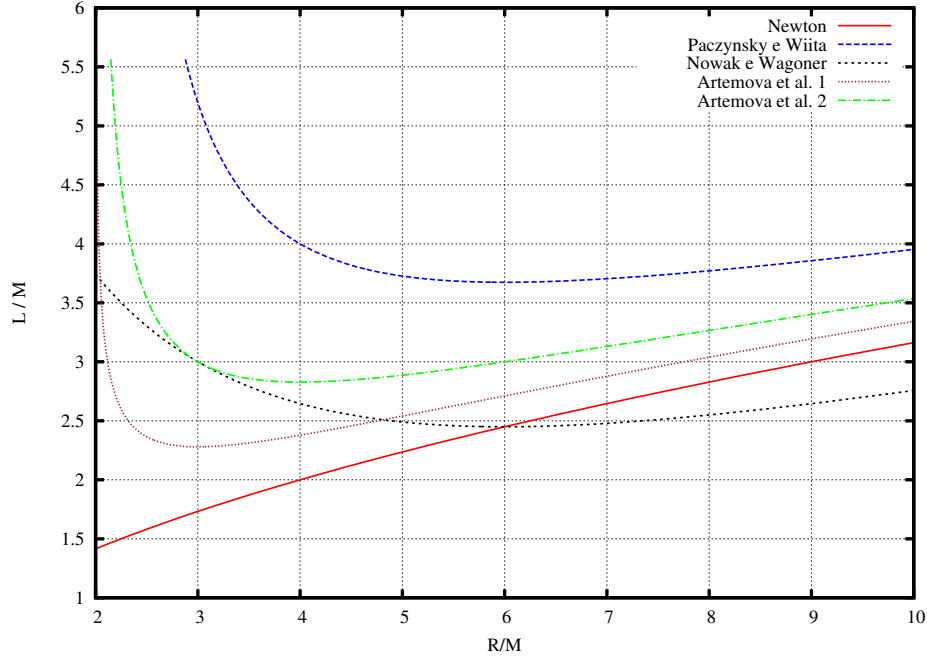


Figura 2.5: Momentos angulares da partícula, como função de R/M , assumindo diferentes interações, a saber: newtoniana, de Paczyński e Wiita, de Nowak e Wagoner e de Artemova et al.

submetida ao potencial efetivo

$$V_{ef}^{rg}(r) = \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}, \quad (2.14)$$

analisada segundo a mecânica unidimensional não-relativística usual. Note que tal potencial é semelhante ao potencial de Nowak-Wagoner. A análise dos máximos e mínimos desse potencial (ver Fig. 2.8) nos conduz aos tipos de órbitas no espaço-tempo de Schwarzschild [2] mostradas, resumidamente, na Tab. 2.2.

Caso	Ponto de Extremo	Interpretação
$L^2 < 12M^2$	Não existe	Partícula cai na singularidade
$L^2 = 12M^2$	Inflexão em $R = 6M$	Órbita marginalmente estável
$L^2 > 12M^2$	Mínimo para $R > 6M$	Órbitas estáveis
	Máximo para $6M > R > 3M$	Órbitas instáveis

Tabela 2.2: Tipos de órbitas das partículas massivas ao redor de um burado negro de Schwarzschild.

Vamos então obter os resultados explicitados na Tab. 2.2. Derivando a Eq. (2.14) e igualando o resultado a zero, encontramos a seguinte equação

$$\left. \frac{dV_{ef}^{rg}(r)}{dr} \right|_{r=R} = 0 \quad \therefore$$

$$(MR^2 - L^2R + 3L^2M^2) / R^4 = 0, \quad (2.15)$$

em que R é o valor de r para o qual V_{ef}^{rg} possui um extremo que está associado às órbitas circulares. As raízes desta equação são:

$$R_{\pm} = \frac{L^2 \pm (L^4 - 12L^2M^2)^{1/2}}{2M}. \quad (2.16)$$

Analisando o termo entre parênteses da equação acima, percebemos que se $L^2 < 12M^2$, não há pontos extremos no potencial. Neste caso, a partícula cai rapidamente na singularidade. Se $L^2 = 12M^2$, há um ponto de inflexão no potencial em $R_+ = R_- = 6M$, ao qual está associada a órbita circular marginalmente estável. Para $L^2 > 12M^2$, há um ponto de mínimo do potencial em R_+ e um máximo em R_- . Assim, existe uma órbita circular estável no raio $R = R_+$, e uma órbita circular instável no raio $R = R_-$. Os gráficos do potencial $V_{ef}^{rg}(r)$ para cada uma dessas situações são mostrados nas Figs. 2.6, 2.7, 2.8, respectivamente. Para $L \gg M$, o valor de R_+ torna-se

$$R_+ \approx \frac{L^2}{M}, \quad (2.17)$$

que é justamente o resultado newtoniano para o raio de uma órbita circular de uma partícula que possui momento angular por unidade de massa L orbitando um objeto estelar de massa M .

Para uma partícula que encontra-se momentaneamente em repouso num ponto de máximo ou de mínimo, a sua verdadeira energia é dada pelo valor do potencial naquele ponto [2]. Assim, a energia da partícula em uma órbita circular instável ou estável é

$$E(R) = \frac{R - 2M}{R^{1/2}(R - 3M)^{1/2}}, \quad (2.18)$$

em que usamos a eq. (2.15) para encontrar a relação entre L e R para estas órbitas circulares. Para $R < 4M$ temos que $E > 1$, e quando $R \rightarrow 3M$ temos que $E \rightarrow \infty$. Assim, partículas em órbitas circulares instáveis entre $3M$ e $4M$ devem escapar para o infinito se sofrerem uma pequena perturbação na direção radial. Por essa razão chamamos a órbita em $R = 4M$ de *órbita circular marginalmente ligada* (marginally bound orbit).

Figura 2.6: Potencial efetivo, dado pela Eq.2.14, com $L^2 = 6M^2$.

Para encontrarmos a energia de ligação da partícula orbitando um buraco negro de Schwarzschild segundo a relatividade geral, subtraímos a energia da órbita circular instável ou estável $E(R)$, da energia por unidade de massa da partícula (a qual vale 1 em unidades naturais). Assim, podemos escrever a energia de ligação da partícula como [2]

$$E_{rg}(R) = 1 - E(R) . \quad (2.19)$$

O comportamento da energia de ligação em função de R pode ser visto na Fig. 2.9.

2.3.2 Órbitas segundo o potencial newtoniano e os pseudo-newtonianos

Nesta sub-seção obteremos a estrutura orbital de acordo com o potencial newtoniano e com os potenciais pseudo-newtonianos, e depois compararemos com as obtidas pela relatividade geral.

Para uma partícula em movimento no plano, a energia mecânica não-relativística E_i por unidade de massa da partícula para qualquer potencial é obtida através da seguinte equação [15]

$$E_i = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 + \varphi_i \quad \therefore$$

$$E_i = \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} r^2 \Omega_i^2 + \varphi_i . \quad (2.20)$$

Figura 2.7: Potencial efetivo, dado pela Eq.2.14, com $L^2 = 12M^2$.

Usando-se a relação $L_i = r^2\Omega_i$, podemos reescrever (2.20) como

$$E_i = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_i^2}{r^2} + \varphi_i, \quad (2.21)$$

que é semelhante à Eq. (2.13), no caso da relatividade geral. Devemos lembrar que para o caso do movimento sujeito a uma força central o momento angular é uma constante do movimento [15]. Assim, o potencial efetivo ao qual a partícula está submetida é

$$V_{ef}^i(r) = \frac{1}{2}\frac{L_i^2}{r^2} + \varphi_i(r). \quad (2.22)$$

Para encontrarmos as órbitas estáveis para cada potencial, devemos determinar os mínimos do potencial efetivo V_{ef}^i , dado pela Eq. (2.22). De (2.22) obtemos que

$$\frac{dV_{ef}^i}{dr} = \frac{d\varphi_i}{dr} - \frac{L_i^2}{r^3}, \quad (2.23)$$

e

$$\frac{d^2V_{ef}^i}{dr^2} = \frac{d^2\varphi_i}{dr^2} + \frac{3L_i^2}{r^4}. \quad (2.24)$$

Os pontos de mínimo de V_{ef}^i , associados às órbitas estáveis, são tais que $\frac{dV_{ef}^i}{dr} = 0$ e $\frac{d^2V_{ef}^i}{dr^2} > 0$. Impondo que $\frac{dV_{ef}^i}{dr} = 0$ em (2.23) ficamos com

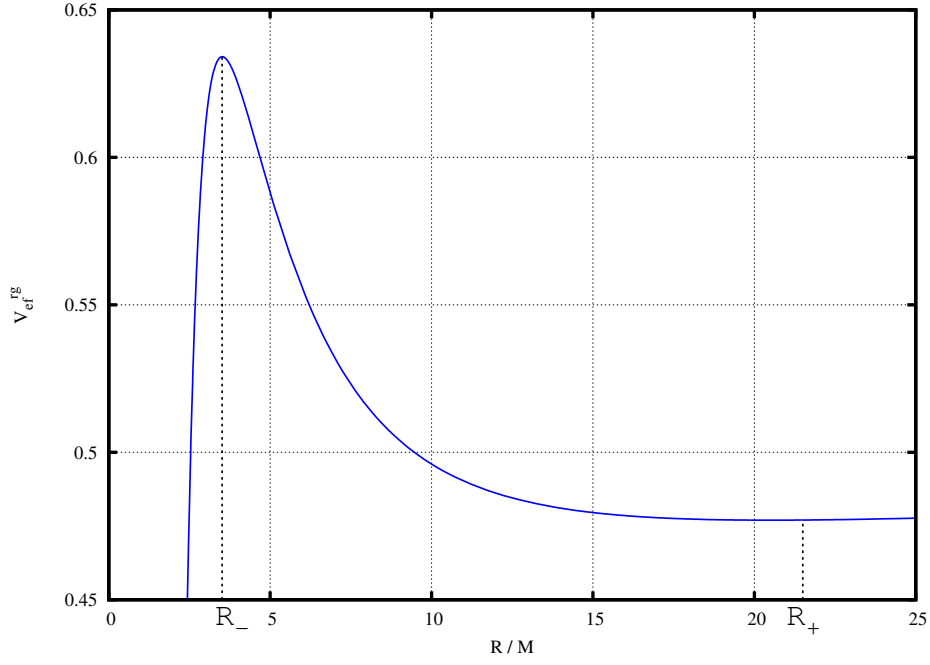


Figura 2.8: Potencial efetivo, dado pela Eq.2.14, com $L^2 = 24M^2$.

$$\left. \frac{d\varphi_i}{dr} \right|_{r=R} = \frac{L_i'^2}{R^3}, \quad (2.25)$$

ou

$$L_i'(R) = \left[R^3 \left. \frac{d\varphi_i}{dr} \right|_{r=R} \right]^{1/2}, \quad (2.26)$$

em que $L_i'(R)$ é o momento angular da órbita circular de raio R [ver Eq. (2.8)]. De (2.24) e (2.26) resulta que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 V_{ef}^i}{dr^2} \right|_{r=R} &= \left. \frac{d^2 \varphi_i}{dr^2} \right|_{r=R} + \frac{3L_i'^2}{R^4} \quad \therefore \\ \left. \frac{d^2 V_{ef}^i}{dr^2} \right|_{r=R} &= \frac{2L_i'}{R^3} \left(\frac{dL_i'}{dR} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Uma vez que $L_i' > 0$, para que $\left. \frac{d^2 V_{ef}^i}{dr^2} \right|_{r=R} > 0$, devemos ter

$$\frac{dL_i'}{dR} > 0,$$

no caso de órbitas estáveis [5, 14]. Na Tab. 2.3 exibimos os valores do raio das órbitas circulares marginalmente estáveis para o caso da relatividade geral e dos potenciais pseudo-newtonianos tratados aqui.

Figura 2.9: A energia de ligação por unidade de massa de uma partícula orbitando um buraco negro de Schwarzschild, dada pela Eq. (2.19).

Os momentos angulares por unidade de massa da partícula em órbita circular em cada potencial estão dados na Tab. 2.1. Suas derivadas são:

$$\frac{dL'_{New}}{dR} = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{R} \right)^{1/2} \quad (2.28)$$

$$\frac{dL'_{PW}}{dR} = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{R} \right)^{1/2} \left[\frac{(R-6M)R}{(R-2M)^2} \right], \quad (2.29)$$

$$\frac{dL'_{NW}}{dR} = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{R} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{36M^2}{R^2} \right) \left(1 - \frac{6M}{R} + \frac{36M^2}{R^2} \right)^{-1/2}, \quad (2.30)$$

$$\frac{dL'_{Art_1}}{dR} = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{R} \right)^{1/2} \frac{R-3M}{R-2M} \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{-1/4}, \quad (2.31)$$

$$\frac{dL'_{Art_2}}{dR} = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{R} \right)^{1/2} \frac{R-4M}{R-2M} \left(1 - \frac{2M}{R} \right)^{-1/2}. \quad (2.32)$$

Um gráfico destas derivadas é mostrado na Fig. 2.10. Analisando esta figura encontramos a órbita circular marginalmente estável para todos os potenciais analisados. Notamos que os potenciais de Paczyński e Wiita e de Nowak e Wagoner reproduzem exatamente esta órbita prevista pela relatividade geral ($R = 6M$). Percebemos que, no caso do potencial newtoniano, todas as órbitas são estáveis, evidenciando que não obtemos a estrutura orbital da relatividade geral a

partir da gravitação newtoniana. Na Tab. 2.3 apresentamos todas as órbitas marginalmente estáveis para os casos estudados.

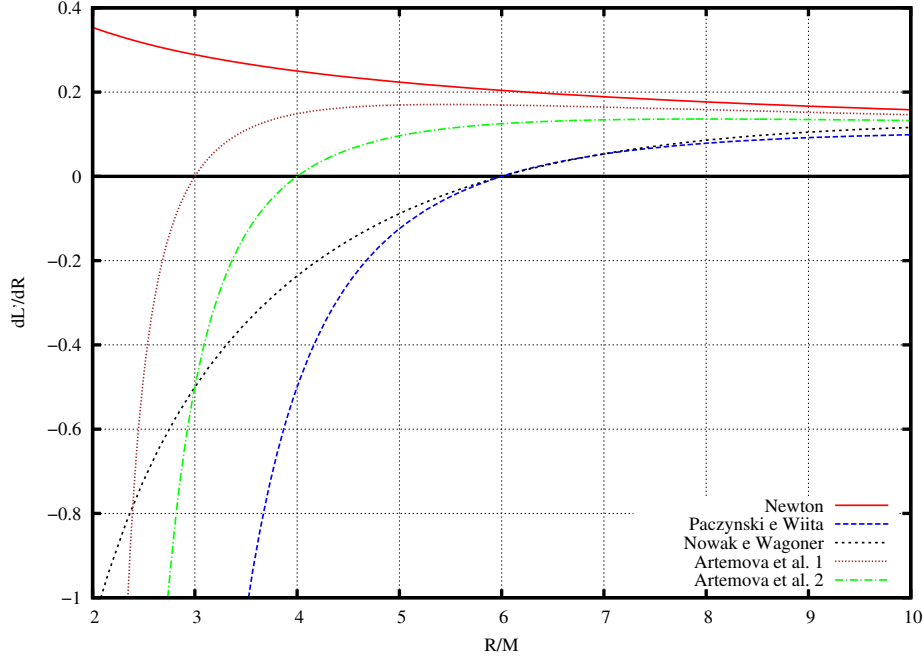


Figura 2.10: A derivada em relação ao raio da trajetória circular R do momento angular da partícula em movimento circular para o potencial newtoniano e para os potenciais pseudo-newtonianos de Paczyński e Wiita, de Nowak e Wagoner, e de Artemova et al.

Vamos analisar agora as órbitas circulares ligadas das partículas. Por isso, nos restringiremos a movimentos em que $\dot{r} = 0$ em (2.21). Assim, as energias por unidade de massa das partículas nas órbitas circulares $E'_i(R)$ são dadas pelo valor do potencial efetivo, a saber

$$E'_i(R) = \frac{1}{2} \frac{L_i'^2}{R^2} + \varphi_i(R) . \quad (2.33)$$

É importante ressaltar que se $E'_i < 0$ a partícula está “ligada”, isto é, presa ao centro atrator [5]. Desta forma, a órbita circular marginalmente ligada está associada ao valor de R para o qual a energia mecânica da órbita circular se anula, i.e. $E'_i = 0$. Usando as definições dos potenciais e dos momentos angulares dados na Tab. 2.1, encontramos

$$E'_{New}(R) = -\frac{M}{2R} , \quad (2.34)$$

$$E'_{PW}(R) = \left(-\frac{M}{2R} \right) \left[\frac{(R - 4M)R}{(R - 2M)^2} \right] , \quad (2.35)$$

$$E'_{NW}(R) = \left(-\frac{M}{2R}\right) \left(1 - \frac{12M^2}{R^2}\right), \quad (2.36)$$

$$E'_{Art_1}(R) = -1 + \frac{M}{2R} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1/2} + \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}, \quad (2.37)$$

e

$$E'_{Art_2}(R) = \frac{M}{2R} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{R}\right). \quad (2.38)$$

A Fig. 2.11 nos mostra a energia mecânica da partícula nas órbitas circulares para todos os potenciais. Notamos que apenas com o potencial de Paczyński e Wiita obtemos o mesmo valor de R para a órbita circular marginalmente ligada de Schwarzschild. Note-se, ainda, que no contexto da gravitação newtoniana todas as órbitas são ligadas. Na Tab. 2.4 apresentamos todas as órbitas marginalmente ligadas para os casos estudados.

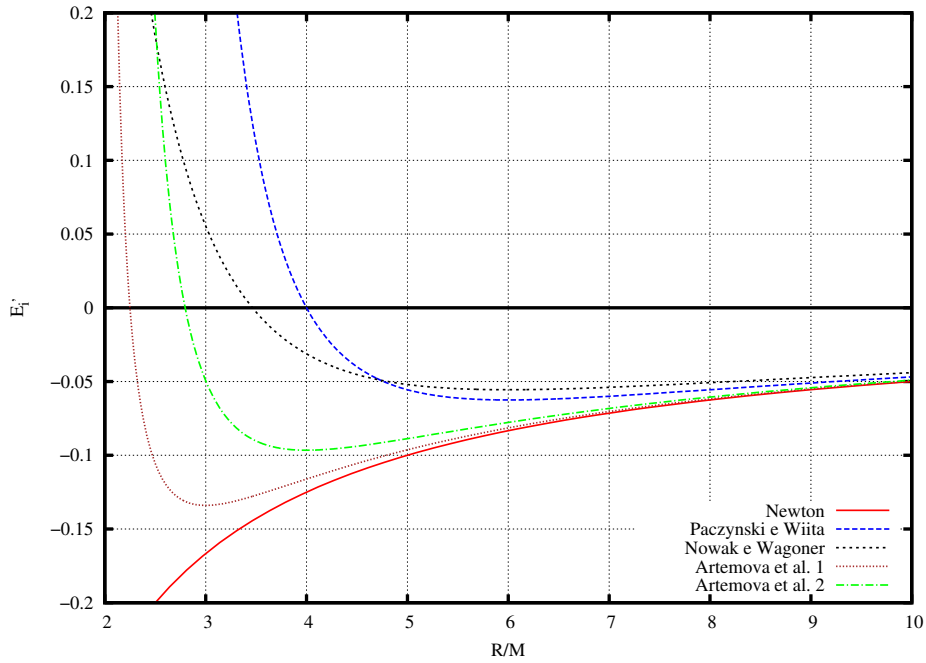


Figura 2.11: Energia mecânica da partícula nas órbitas circulares assumindo o potencial newtoniano e os diferentes potenciais pseudo-newtonianos.

Vamos agora definir a eficiência e como sendo a energia (por unidade de massa) da partícula na órbita circular calculada em $R = 6M$. Assim, temos que [14]

$$e_i \equiv |E'_i(R = 6M)|. \quad (2.39)$$

Na Tab. 2.5 comparamos a eficiência para cada potencial analisado neste trabalho. Percebemos

que o menor erro ($\approx 3\%$) em relação à Schwarzschild ocorre quando assumimos o potencial de Nowak e Wagoner.

Concluimos, desta forma, que os potenciais de Paczyński e Wiita e Nowak e Wagoner são os que melhor reproduzem as características das órbitas ao redor de um buraco negro de Schwarzschild.

Caso	Órbita marginalmente estável
Relatividade geral	$6M$
Newton	-
Paczyński e Wiita	$6M$
Nowak e Wagoner	$6M$
Artemova et al. 1	$3M$
Artemova et al. 2	$4M$

Tabela 2.3: Órbitas marginalmente estáveis para cada potencial.

Caso	Órbita marginalmente ligada
Relatividade geral	$4M$
Newton	-
Paczyński e Wiita	$4M$
Nowak e Wagoner	$3,46M$
Artemova et al. 1	$2,25M$
Artemova et al. 2	$2,81M$

Tabela 2.4: Órbitas marginalmente estáveis para cada potencial.

Caso	$e_i = E'_i(R = 6M) $
Newton	0,0834
Paczyński e Wiita	0,0625
Nowak e Wagoner	0,0556
Artemova et al. 1	0,0814
Artemova et al. 2	0,0777
Relatividade geral	0,0572

Tabela 2.5: Eficiência de cada caso analisado.

Capítulo 3

Radiação escalar no espaço-tempo de Minkowski

3.1 Quantização do campo escalar no espaço-tempo de Minkowski

Nesta seção acompanharemos [17] para mostrar o processo de quantização do campo escalar no espaço-tempo de Minkowski.

Usando coordenadas polares esféricas, o elemento de linha deste espaço-tempo é dado por

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.1)$$

que pode ser reescrito como $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$, em que

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(+1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta) \quad (3.2)$$

são as componentes da métrica de Minkowski neste sistema de coordenadas.

A interação entre a fonte $j(x^\alpha)$ e o campo escalar quântico $\widehat{\Phi}(x^\alpha)$ será dada pelo acoplamento mínimo. Assim, a ação é escrita sob a seguinte forma:

$$\widehat{S} = \int d^4x \sqrt{-\eta} \left[\frac{1}{2} \nabla^\alpha \widehat{\Phi}(x^\beta) \nabla_\alpha \widehat{\Phi}(x^\beta) + j(x^\beta) \widehat{\Phi}(x^\beta) \right], \quad (3.3)$$

com $\eta = \det \eta_{\alpha\beta}$, de tal modo que $d^4x \sqrt{-\eta}$ é o elemento de 4-volume invariante no espaço-tempo de Minkowski.

O operador campo escalar $\widehat{\Phi}(x^\alpha)$ é dado por

$$\widehat{\Phi}(x^\alpha) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \int_0^{+\infty} d\omega [u_{\omega lm}(x^\alpha) \widehat{a}_{\omega lm} + u_{\omega lm}^*(x^\alpha) \widehat{a}_{\omega lm}^\dagger], \quad (3.4)$$

em que $\widehat{a}_{\omega lm}^\dagger$ e $\widehat{a}_{\omega lm}$ são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação, e $u_{\omega lm}(x^\alpha)$ são os modos de frequência positiva associados com observadores inerciais estáticos em $x^i = \text{constante}$,

$$u_{\omega lm}(x^\alpha) \propto e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0). \quad (3.5)$$

Os modos $u_{\omega lm}(x^\alpha)$ são soluções da equação de Klein-Gordon homogênea no espaço-tempo de Minkowski

$$\square u_{\omega lm}(x^\rho) = \eta_{\alpha\beta} \nabla^\alpha \nabla^\beta u_{\omega lm}(x^\rho) = 0, \quad (3.6)$$

em que

$$\nabla_\alpha u_{\omega lm} = \partial_\alpha u_{\omega lm},$$

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha u_{\omega lm} = \nabla_\beta (\partial_\alpha u_{\omega lm}) = \partial_\beta (\partial_\alpha u_{\omega lm}) - \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \partial_\lambda u_{\omega lm},$$

com as componentes da conexão $\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda$ dadas por

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\lambda = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\rho} (\partial_\beta \eta_{\rho\alpha} + \partial_\alpha \eta_{\rho\beta} - \partial_\rho \eta_{\beta\alpha}).$$

Usando as componentes da conexão não-nulas no espaço-tempo de Minkowski, podemos reescrever a equação (3.6) da seguinte forma

$$\square u_{\omega lm} = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \widetilde{\nabla}^2 \right] u_{\omega lm} = 0, \quad (3.7)$$

em que definimos

$$\widetilde{\nabla}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \cotg\theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{(\text{sen}\theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (3.8)$$

Escrevendo os modos $u_{\omega lm}(x^\alpha)$ em termos dos harmônicos esféricos, temos

$$u_{\omega lm}(x^\alpha) = R_{\omega l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0). \quad (3.9)$$

Usando esta última equação e a relação

$$\widetilde{\nabla}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = +l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.10)$$

podemos reescrever (3.7) como

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \left(\omega^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] R_{\omega l}(r) = 0. \quad (3.11)$$

A equação (3.11) é a equação diferencial que define as funções de Bessel esféricas na variável ωr , a saber: $j_l(\omega r)$ e $\eta_l(\omega r)$ [18]. Porém, a solução $\eta_l(\omega r)$ deve ser descartada pois diverge na origem, e assim, não é normalizável. Então, podemos reescrever (3.9) como

$$u_{\omega lm}(x^\alpha) = c_\omega j_l(\omega r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0) , \quad (3.12)$$

em que c_ω é a constante a ser determinada pela normalização dos modos $u_{\omega lm}(x^\alpha)$. Esta normalização é obtida a partir do produto interno de Klein-Gordon

$$\sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n^\alpha [\phi_1^*(\nabla_\alpha \phi_2) - (\nabla_\alpha \phi_1^*) \phi_2] , \quad (3.13)$$

em que $d\Sigma^{(3)} = \sqrt{-\eta^{(3)}} dx^3$ é o elemento de 3-volume invariante no espaço-tempo plano da superfície de Cauchy $\Sigma^{(3)}$, n^α é o vetor unitário ortogonal à superfície tipo-espaço $\Sigma^{(3)}$, direcionado para o futuro, e η^3 é o determinante da métrica restrito à $\Sigma^{(3)}$. Desde que ϕ_1 e ϕ_2 satisfaçam a equação de Klein-Gordon, (3.13) é independente da superfície escolhida. Assim, escolheremos a superfície $\Sigma^{(3)}$ com $t = \text{constante}$. Desta forma, no espaço-tempo plano, usando coordenadas esféricas, temos que

$$d\Sigma^{(3)} = \sqrt{-\eta^{(3)}} dr d\theta d\varphi = r^2 \text{sen}\theta dr d\theta d\varphi ,$$

e

$$n^\alpha = \delta_0^\alpha .$$

Agora vamos impor as condições de ortonormalização dos modos $u_{\omega lm}(x^\alpha)$ e seus complexos conjugados $u_{\omega lm}^*(x^\alpha)$

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}, u_{\omega' l' m'}) = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (3.14)$$

e

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}^*, u_{\omega' l' m'}) = 0 . \quad (3.15)$$

Assim,

$$[\hat{a}_{\omega lm}, \hat{a}_{\omega' l' m'}] = [\hat{a}_{\omega lm}^\dagger, \hat{a}_{\omega' l' m'}^\dagger] = 0 , \quad (3.16)$$

e

$$[\hat{a}_{\omega lm}, \hat{a}_{\omega' l' m'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \quad (3.17)$$

Usando (3.13), podemos normalizar (3.12), encontrando a constante de normalização c_ω . Então, usando estas equações e escolhendo a superfície $\Sigma^{(3)}$ com $t = \text{constante}$, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_{KG}(u_{\omega lm}, u_{\omega' l' m'}) &= (\omega + \omega') c_\omega^* c_{\omega'} e^{i(\omega - \omega')t} \int_0^{+\infty} dr r^2 j_{l'}(\omega' r) j_l(\omega r) \times \\ &\quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\varphi \text{sen}\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Usando

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\varphi \sin\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (3.19)$$

e

$$\int_0^{+\infty} dr r^2 j_l(\omega' r) j_l(\omega r) = \frac{\pi}{2\omega^2} \delta(\omega - \omega') \quad (3.20)$$

em (3.18), encontramos

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}, u_{\omega' l' m'}) = \frac{\pi}{\omega} |c_\omega|^2 \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'} . \quad (3.21)$$

Comparando esta última equação com (3.14), obtemos

$$c_\omega = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} , \quad (3.22)$$

a menos de uma fase multiplicativa arbitrária.

A partir do vácuo de Minkowski $|0\rangle_M$, i.e. o estado aniquilado pelos operadores destruição $\hat{a}_{\omega lm}$,

$$\hat{a}_{\omega lm} |0\rangle_M = 0 , \quad (3.23)$$

podemos construir o espaço de Fock, através da aplicação do operador de criação sobre este estado de vácuo.

3.2 Potência emitida por uma fonte orbitando um objeto estelar no espaço-tempo de Minkowski

Vamos agora calcular a potência irradiada, assim como medida por observadores inerciais. Assumiremos que a órbita da partícula está no plano equatorial $\theta = \pi/2$, com raio R e velocidade angular $\Omega > 0$ (medida por observadores inerciais), de forma que a 4-velocidade e a 4-corrente associadas à partícula são dadas, respectivamente, por

$$u^\alpha(\Omega, R) = \gamma (1, 0, 0, \Omega) , \quad (3.24)$$

$$j(x^\alpha) = \frac{q}{R^2 \gamma} \delta(r - R) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\varphi - \Omega t) , \quad (3.25)$$

em que q é a magnitude do acoplamento entre o campo e a fonte, e $\gamma = 1/\sqrt{1 - (R\Omega)^2}$ é o fator de Lorentz.

Escolhemos o estado inicial como sendo o vácuo de Minkowski $|0\rangle_M$. Assim, a amplitude de transição $A_{\omega lm}^M$ deste estado de vácuo para o estado de uma partícula com números quânticos ω , l e m , $|1; \omega lm\rangle$, é dada por

$$A_{\omega lm}^M = \langle 1; \omega lm | i \hat{S}_{int} | 0 \rangle_M \quad \therefore$$

$$A_{\omega lm}^M = \langle 1; \omega lm | i \int d^4x \sqrt{-\eta} j(x^\alpha) \hat{\Phi}(x^\alpha) | 0 \rangle_M . \quad (3.26)$$

Recorrendo à (3.4), às relações resultantes das atuações dos operadores criação e aniquilação no estado de vácuo $|0\rangle_M$, e lembrando que os auto-estados são ortogonais, i. e.

$$\langle 1; \omega lm | 1; \omega' l' m' \rangle = \delta(\omega - \omega') \delta_{ll'} \delta_{mm'} , \quad (3.27)$$

encontramos

$$A_{\omega lm}^M = i \int d^4x \sqrt{-\eta} j(x^\alpha) u_{\omega lm}^*(x^\alpha) . \quad (3.28)$$

Usando (3.25) e lembrando que em coordenadas esféricas no espaço-tempo de Minkowski temos

$$d^4x \sqrt{-\eta} = dt dr d\theta d\varphi r^2 \sin\theta ,$$

podemos escrever

$$A_{\omega lm}^M = \frac{2iq}{\gamma} \sqrt{\pi m \Omega} j_l(m\Omega R) C_{lm} P_l^m(0) \delta(\omega - m\Omega) , \quad (3.29)$$

em que usamos que

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} , \quad (3.30)$$

com

$$C_{lm} = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} , \quad (3.31)$$

e

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-i(x-x_0)k} . \quad (3.32)$$

Analisando (3.29), percebe-se que apenas partículas com frequência $\omega = m\Omega$ serão emitidas, uma vez que $A_{\omega lm}^M \propto \delta(\omega - m\Omega)$.

A potência emitida, assim como calculada por observadores inerciais, para um valor fixo de momento angular, é dada por:

$$W_{lm}^M = \int_0^{+\infty} d\omega \omega \frac{|A_{\omega lm}^M|^2}{T} , \quad (3.33)$$

em que

$$T = 2\pi\delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \quad (3.34)$$

é o tempo total medido por observadores inerciais [19]. Assim, usando (3.29), encontramos que (3.33) pode ser reescrita por

$$W_{lm}^M = \frac{2m^2\Omega^2q^2}{\gamma^2} |j_l(m\Omega R)|^2 |Y_{lm}(\pi/2; \Omega t)|^2 . \quad (3.35)$$

Portanto, a potência total irradiada é

$$W^M = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^l W_{lm}^M \quad . \cdot$$

$$W^M = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^l \frac{2m^2\Omega^2q^2}{\gamma^2} [j_l(m\Omega R)]^2 |Y_{lm}(\pi/2; \Omega t)|^2 . \quad (3.36)$$

Pela definição (3.30), percebemos que a potência total irradiada pela fonte não depende do tempo. Usando a relação¹ [4]

$$\sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^l m^2 |j_l(m\xi)|^2 |Y_{lm}(\pi/2, \phi)|^2 = \frac{1}{24\pi} \frac{\xi^2}{(1-\xi^2)^3} \quad (|\xi| < 1) , \quad (3.37)$$

em (3.36), chegamos por fim que a potência emitida pela fonte orbitando um objeto estelar no espaço-tempo de Minkowski é dada por:

$$W^M = \frac{q^2\gamma^4\Omega^4R^2}{12\pi} . \quad (3.38)$$

Note-se que até então não especificamos o tipo de interação entre o objeto central e a fonte que o orbita. Isso será feito na próxima seção.

Para concluir esta seção, vale ressaltar que o resultado (3.38) pode ser obtido pelo método das funções de Green via teoria clássica de campos² [17]. Tal igualdade deve-se ao fato de nossa análise quântica ser em *nível de árvore* [19].

3.3 Potência emitida nos casos newtoniano e pseudo-newtonianos

Nesta seção vamos explicitar a potência emitida pela fonte considerando sua interação com o objeto estelar no espaço-tempo plano determinada pelos diferentes potenciais apresentados no capítulo anterior.

¹Apresentamos a demonstração desta equação no Apêndice A.

²Isto é feito no Apêndice B.

Como estes resultados vão ser comparados com o caso análogo no espaço-tempo de Schwarzschild, devemos reescrever a potência emitida em Minkowski (3.38) em termos de observáveis assintóticos, a saber: a massa do objeto central M e a velocidade angular da partícula Ω , assim como medida por observadores assintóticos. Desta forma, devemos escrever $R = R(M, \Omega)$, e é por meio dessa relação que vamos explicitar o tipo de interação. Devido à importância destes resultados para este trabalho, faremos isso separadamente para cada potencial.

3.3.1 Potencial newtoniano

No caso newtoniano, usaremos a 3ª lei de Kepler para escrever:

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \frac{M}{R_{New}^3} \quad \therefore \\ R_{New} &= \left(\frac{M}{\Omega^2}\right)^{1/3}.\end{aligned}\quad (3.39)$$

Substituindo esta expressão em (3.38), encontramos a potência em Minkowski assumindo a interação newtoniana, a saber

$$W_{New}^M = \frac{q^2 M^{2/3} \gamma_{New}^4 \Omega^{8/3}}{12\pi}, \quad (3.40)$$

com $\gamma_{New} = 1/\sqrt{1 - (M\Omega)^{2/3}}$.

Efetuiremos um procedimento análogo para todos os potenciais pseudo-newtonianos. Em cada caso, a 3ª lei de Kepler pseudo-newtoniana pode ser obtida por meio da velocidade angular dada na Tab. 2.1.

3.3.2 Potencial de Paczyński e Wiita

Para o caso de Paczyński e Wiita [5] temos (ver Tab. 2.1)

$$\begin{aligned}\Omega^2 &= \frac{M}{R_{PW}(R_{PW} - 2M)^2} \quad \therefore \\ R_{PW}^3 - 4MR_{PW}^2 + 4M^2R_{PW} &= \frac{M}{\Omega^2},\end{aligned}\quad (3.41)$$

cujas únicas soluções reais são dadas por:

$$R_{PW}(M, \Omega) = \frac{4M}{3} + \frac{2^{1/3}4M^2\Omega^2}{3\chi_+^{1/3}} + \frac{\chi_+^{1/3}}{2^{1/3}3\Omega^2}, \quad (3.42)$$

com

$$\chi_+ = M\Omega^4 \left(27 - 16M^2\Omega^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{27 - 32M^2\Omega^2} \right). \quad (3.43)$$

Assim, a potência emitida assumindo-se o potencial de Paczyński e Wiita é:

$$W_{PW}^M = \frac{q^2\gamma_{PW}^4\Omega^4 R_{PW}^2(M, \Omega)}{12\pi}, \quad (3.44)$$

com R_{PW} dado em (3.42)-(3.43) e $\gamma_{PW} = 1/\sqrt{1 - (R_{PW}(M, \Omega))^2}$.

3.3.3 Potencial de Nowak e Wagoner

Para o potencial de Nowak e Wagoner [13] temos a equação (ver Tab. 2.1)

$$\Omega = \left[\frac{M}{R_{NW}^3} \left(1 - \frac{6M}{R_{NW}} + \frac{36M^2}{R_{NW}^2} \right) \right]^{1/2},$$

a qual pode ser reescrita sob a forma

$$R_{NW}^5 - \frac{M}{\Omega^2} R_{NW}^2 + \frac{6M^2}{\Omega^2} R_{NW} = \frac{36M^3}{\Omega^2}. \quad (3.45)$$

Não foi possível escrever a solução de (3.45) de forma analítica. Desta forma, resolvemos (3.45) numericamente, obtendo uma relação numérica $R_{NW} = R_{NW}(M, \Omega)$, análoga à (3.42). Com isso, a potência emitida para essa situação pode ser escrita por

$$W_{NW}^M = \frac{q^2\gamma_{NW}^4\Omega^4 R_{NW}^2(M, \Omega)}{12\pi}, \quad (3.46)$$

em que $\gamma_{NW} = 1/\sqrt{1 - (R_{NW}(M, \Omega))^2}$.

3.3.4 Potenciais de Artemova et al.

Para os potenciais propostos por Artemova et al. [14] temos as seguintes relações (ver Tab. 2.1)

$$R_{Art_1}^6 - 2MR_{Art_1}^5 = \frac{M^2}{\Omega^4}, \quad (3.47)$$

e

$$R_{Art_2}^3 - 2MR_{Art_2}^2 = \frac{M}{\Omega^2}. \quad (3.48)$$

Não conseguimos encontrar uma solução analítica para (3.47). Conseqüentemente, adotamos o mesmo procedimento usado para o caso de Nowak e Wagoner. Para o segundo potencial proposto por Artemova et al. temos a solução

$$R_{Art_2}(M, \Omega) = \frac{2M}{3} + \frac{2^{1/3}4M^2\Omega^2}{3\chi_-^{1/3}} - \frac{\chi_-^{1/3}}{2^{1/3}3\Omega^2}, \quad (3.49)$$

em que χ_- é dado por:

$$\chi_- = M\Omega^4 \left(-27 - 16M^2\Omega^2 + 3\sqrt{3}\sqrt{27 + 32M^2\Omega^2} \right). \quad (3.50)$$

Portanto, as potências para os potenciais de Artemova et al. podem escritas sob a forma

$$W_{Art_i}^M = \frac{q^2 \gamma_{Art_i}^4 \Omega^4 R_{Art_i}^2(M, \Omega)}{12\pi}, \quad (3.51)$$

na qual $\gamma_{Art_i} = 1/\sqrt{1 - (R_{Art_i}(M, \Omega))^2}$ e $i = 1, 2$.

3.4 Resultados

De posse da potência calculada assumindo o potencial newtoniano (W_{New}^M), e das potências calculadas assumindo os potenciais pseudo-newtonianos de Paczyński e Wiita (W_{PW}^M), Nowak e Wagoner (W_{NW}^M) e os de Artemova et al. ($W_{Art_i}^M$), dadas, respectivamente, por (3.40), (3.44), (3.46) e (3.51) fizemos uma comparação direta entre suas intensidades nas Figs. 3.1 e 3.2. Ressalte-se que todas as potências tendem a zero no infinito. Na Fig. 3.3 mostramos a razão W_i^M/W_{New}^M , entre a potência assumindo o potencial newtoniano e os potenciais pseudo-newtonianos, desde órbitas muito afastadas até a última órbita circular instável.

Para órbitas infinitamente afastadas do buraco negro até a última órbita circular estável a seguinte relação entre as intensidades das potências emitidas é obedecida: $W_{PW}^M > W_{Art_2}^M > W_{Art_1}^M > W_{New}^M > W_{NW}^M$ (ver Fig. 3.1).

Nas órbitas circulares instáveis, entre $M\Omega = 0,068$ ($R = 6M$) e $M\Omega = 0,192$ ($R = 3M$), a potência associada à interação newtoniana torna-se a menor. A ordem decrescente de intensidades $W_{PW}^M > W_{Art_2}^M > W_{Art_1}^M > W_{NW}^M > W_{New}^M$ é obedecida de $M\Omega = 0,068$ ($R = 6M$) até $M\Omega \cong 0,14$, uma vez que, a partir dessa órbita, ocorre uma inversão entre $W_{Art_1}^M$ e W_{NW}^M . A partir de $M\Omega \cong 0,11$ até a órbita circular instável mais interna possível $M\Omega = 0,192$ ($R = 3M$) a potência associada a esse potencial de Artemova et al. ($\varphi_{Art_1}^M$) torna-se a mais próxima da newtoniana.

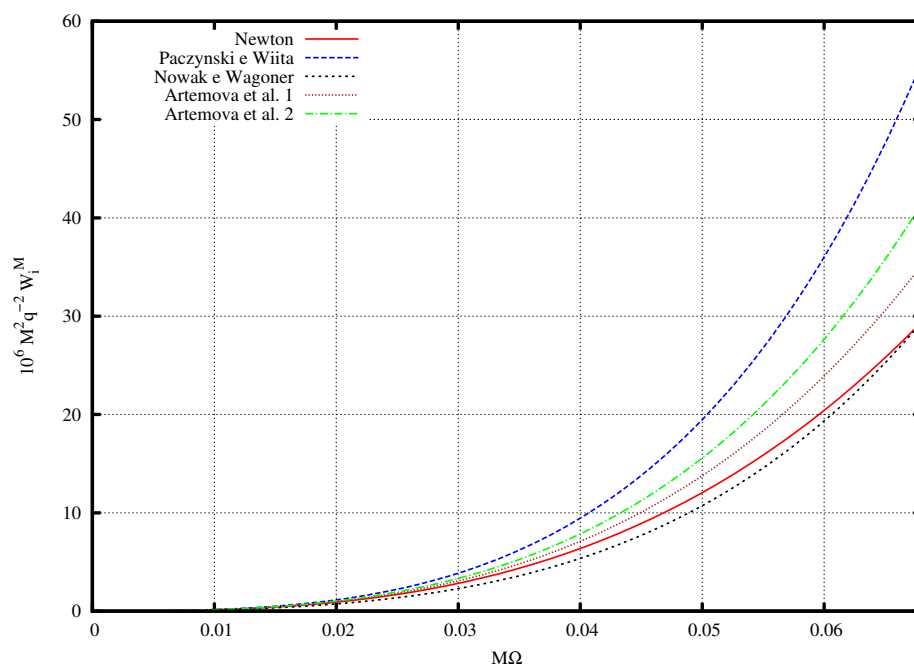


Figura 3.1: As potências emitidas pela fonte assumindo os potenciais newtoniano, de Paczyński e Wiita, de Nowak e Wagoner e de Artemova et al., plotadas do infinito até a última órbita circular estável $R = 6M$ (segundo a relatividade geral).

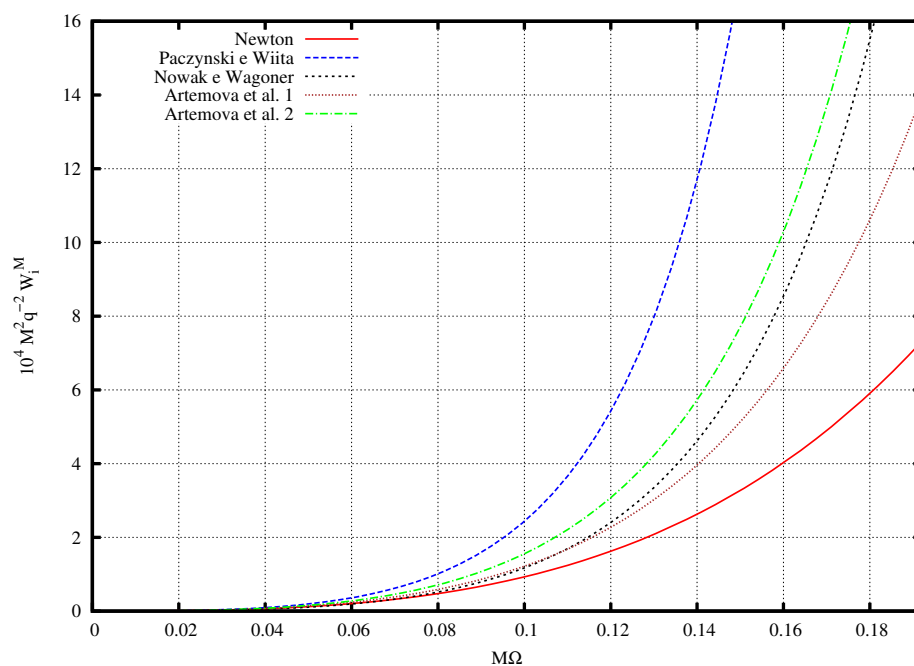


Figura 3.2: As potências emitidas pela fonte assumindo os potenciais newtoniano, de Paczyński e Wiita, de Nowak e Wagoner e de Artemova et al., plotadas do infinito até a última órbita circular instável $R = 3M$ (segundo a relatividade geral).

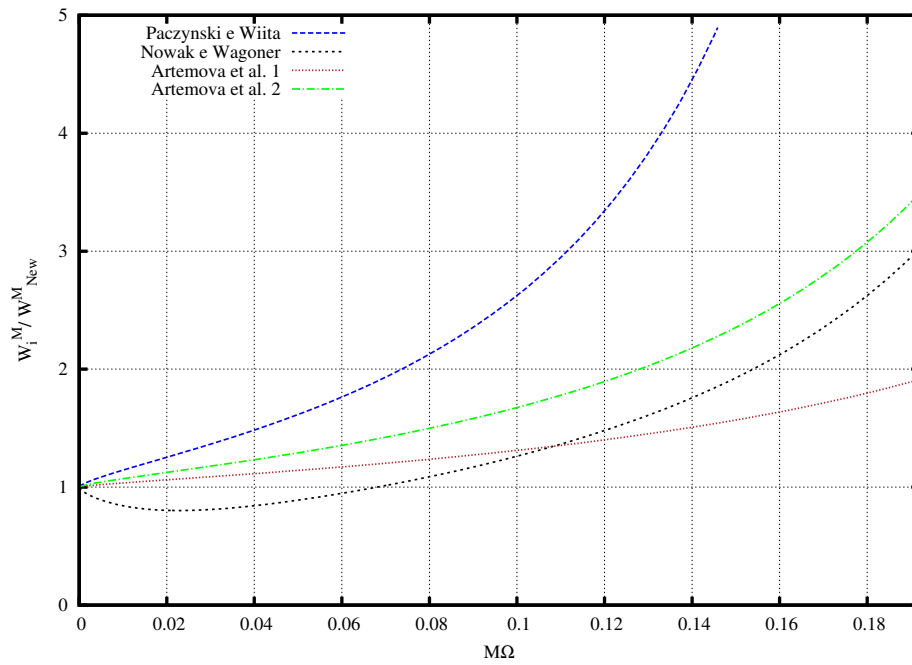


Figura 3.3: Razões W_{PW}^M / W_{New}^M , W_{NW}^M / W_{New}^M , $W_{Art_1}^M / W_{New}^M$ e $W_{Art_2}^M / W_{New}^M$ entre potências emitidas pela fonte assumindo os vários potenciais discutidos neste trabalho, plotadas do infinito até a última órbita circular instável em $R = 3M$ (segundo a relatividade geral).

Capítulo 4

Radiação escalar no espaço-tempo de Schwarzschild

4.1 Quantização do campo de Klein-Gordon no espaço-tempo de Schwarzschild

Nesta seção seguiremos também a Ref. [17]. As componentes da métrica do espaço-tempo de um buraco negro estático e sem carga, com massa M , em coordenadas polares esféricas, são dadas por

$$g_{\alpha\beta} = \text{diag} (f(r), f^{-1}(r), -r^2, -r^2 \text{sen}^2\theta) , \quad (4.1)$$

com $f(r) = 1 - 2M/r$. Portanto, o elemento de linha de Schwarzschild é

$$dS^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = f(r) dt^2 - f^{-1}(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2\theta d\varphi^2 . \quad (4.2)$$

A lagrangeana do campo escalar livre não-massivo $\phi(x^\alpha)$ é dada por

$$\mathcal{L} = (\nabla^\alpha \phi(x^\beta)) (\nabla_\alpha \phi(x^\beta)) , \quad (4.3)$$

com $g = \det(g_{\alpha\beta})$. Usando a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla^\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_\alpha \phi)} \right] = 0 , \quad (4.4)$$

obtemos a equação de Klein-Gordon homogênea para o campo $\phi(x^\alpha)$

$$\square \phi = \nabla^\alpha (\nabla_\alpha \phi) = 0 . \quad (4.5)$$

O procedimento a seguir será análogo ao realizado na quantização do campo escalar em Minkowski (capítulo anterior). Assim, resolveremos a equação (4.5) pelo método da separação de variáveis, fazendo: $\phi = \tau(t)\psi(r)Y(\theta, \varphi)$. A solução temporal é proporcional a $e^{-i\omega t}$, ou seja, os modos de frequência positiva com relação ao campo de Killing tipo-tempo ∂_t ,

$$u_{\omega lm}(x^\alpha) \propto e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0) , \quad (4.6)$$

são soluções da equação de Klein-Gordon homogênea no espaço-tempo de Schwarzschild, a qual pode ser escrita como [20]

$$\square u_{\omega lm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left[\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\omega lm}}{\partial x^\beta} \right] = 0 . \quad (4.7)$$

Ao usarmos (4.1) nesta equação encontramos

$$\left[\frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 f \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 \right] u_{\omega lm} = 0 , \quad (4.8)$$

em que $\tilde{\nabla}^2$ está definido em (3.8).

No espaço-tempo de Schwarzschild os modos $u_{\omega lm}(x^\alpha)$ podem ser escritos na forma

$$u_{\omega lm}(x^\alpha) = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{\psi_{\omega l}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-i\omega t} \quad (\omega > 0) . \quad (4.9)$$

Usando esta expressão e a Eq. (3.10) em (4.8), encontramos

$$\left[-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 f \frac{d}{dr} \right) - \frac{\omega^2}{f} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \left(\frac{\psi_{\omega l}(r)}{r} \right) = 0 , \quad (4.10)$$

ou ainda,

$$\left[-f(r) \frac{d}{dr} \left(f(r) \frac{d}{dr} \right) + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] \psi_{\omega l}(r) = \omega^2 \psi_{\omega l}(r) , \quad (4.11)$$

em que podemos definir o seguinte potencial efetivo

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{2M}{r^3} + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) . \quad (4.12)$$

Em termos da coordenada adimensional de Wheeler,

$$x(r) = \frac{r}{2M} + \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) , \quad (4.13)$$

podemos escrever $r = r(x)$. Desta forma, a Eq. (4.11) torna-se

$$\left(-\frac{1}{4M^2} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \psi_{\omega l}(x) = \omega^2 \psi_{\omega l}(x) \quad \therefore$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 4M^2V(r(x)) \right] \psi_{\omega l}(x) = 4M^2\omega^2\psi_{\omega l}(x) . \quad (4.14)$$

Para ortonormalizar os modos $u_{\omega lm}(x^\alpha)$ usamos a definição do produto interno de Klein-Gordon (3.13), escrito agora para o espaço-tempo de Schwarzschild, a saber:

$$\sigma_{KG}(\phi_1, \phi_2) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)} n^\alpha [\phi_1^*(\nabla_\alpha \phi_2) - (\nabla_\alpha \phi_1^*)\phi_2] . \quad (4.15)$$

O momento clássico conjugado ao campo $\phi(x^\alpha)$ é definido como

$$\pi \equiv n^\alpha \pi_\alpha = n^\alpha \nabla_\alpha \phi . \quad (4.16)$$

Mais uma vez, iremos escolher uma superfície com t constante, denotada por $\Sigma_t^{(3)}$. Desta forma, para o espaço-tempo de Schwarzschild em coordenadas esféricas, temos que

$$d\Sigma_t^{(3)\alpha} = \frac{r^2}{\sqrt{f}} \text{sen}\theta dr d\theta d\varphi n^\alpha = \frac{r^2 \text{sen}\theta}{f} dr d\theta d\varphi \delta_0^\alpha . \quad (4.17)$$

Para quantizar o campo $\phi(x^\alpha)$, vamos impor as relações de comutação a tempos iguais

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Phi}(t, \vec{x}')] = [\hat{\Pi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')] = 0 , \quad (4.18)$$

$$[\hat{\Phi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')] = \frac{i n_0}{\sqrt{-g}} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{i}{\sqrt{-g^{(3)}}} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') , \quad (4.19)$$

em que $\{x^\alpha\} = (t, \vec{x})$ e $\{x'^\alpha\} = (t', \vec{x}')$, e

$$\hat{\Pi} \equiv n^\alpha \hat{\Pi}_\alpha = n^\alpha \nabla_\alpha \hat{\Phi} . \quad (4.20)$$

Expandindo o operador de campo $\hat{\Phi}(x^\alpha)$ em termos dos modos de frequência positiva e negativa, $u_{\omega lm}(x^\alpha)$ e $u_{\omega lm}^*(x^\alpha)$, e dos operadores criação e aniquilação $\hat{a}_{\omega lm}^\dagger$ e $\hat{a}_{\omega lm}$, ficamos com

$$\hat{\Phi}(x^\alpha) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \int_0^{+\infty} d\omega \left[u_{\omega lm}(x^\alpha) \hat{a}_{\omega lm} + u_{\omega lm}^*(x^\alpha) \hat{a}_{\omega lm}^\dagger \right] . \quad (4.21)$$

De (4.20) e (4.21) podemos escrever

$$\hat{\Pi}_\alpha(x^\beta) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \int_0^{+\infty} d\omega \left[(\nabla_\alpha u_{\omega lm}) \hat{a}_{\omega lm} + (\nabla_\alpha u_{\omega lm}^*) \hat{a}_{\omega lm}^\dagger \right] . \quad (4.22)$$

Agora determinaremos as relações de comutação entre os operadores $\hat{a}_{\omega lm}$ e $\hat{a}_{\omega lm}^\dagger$, definidos em (4.21). Inicialmente, requeremos que os modos $u_{\omega lm}(x^\alpha)$ satisfaçam

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}, u_{\omega' l' m'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') , \quad (4.23)$$

e

$$\sigma_{KG}(u_{\omega ml}^*, u_{\omega' m' l'}) = 0 . \quad (4.24)$$

Usando (4.15) e

$$\sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega lm}) = i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma^{(3)\alpha} \left[\hat{\Phi}^\dagger (\nabla_\alpha u_{\omega lm}) - (\nabla_\alpha \hat{\Phi}^\dagger) u_{\omega lm} \right] , \quad (4.25)$$

além de (4.18)-(4.20), podemos mostrar que

$$\left[\sigma_{KG}(u_{\omega lm}, \hat{\Phi}), \sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega' l' m'}) \right] = \sigma_{KG}(u_{\omega lm}, u_{\omega' l' m'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') . \quad (4.26)$$

Por outro lado, usando (3.13), (4.21), (4.23) e (4.24) obtemos

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}, \hat{\Phi}) = \sum_{l'm'} \hat{a}_{\omega l' m'} \delta_{mm'} \delta_{ll'} , \quad (4.27)$$

e

$$\sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega' l' m'}) = \sum_{l''m''} \hat{a}_{\omega' l'' m''}^\dagger \delta_{mm''} \delta_{l'l''} , \quad (4.28)$$

das quais segue-se que

$$\left[\sigma_{KG}(u_{\omega lm}, \hat{\Phi}), \sigma_{KG}(\hat{\Phi}, u_{\omega' l' m'}) \right] = \sum_{l''m''} \sum_{l'''m'''} \delta_{mm''} \delta_{ll''} \left[\hat{a}_{\omega l'' m''}, \hat{a}_{\omega' l''' m'''}^\dagger \right] \delta_{l'l'''} \delta_{m'm'''} . \quad (4.29)$$

Assim, concluímos de (4.26) e (4.29) que

$$[\hat{a}_{\omega lm}, \hat{a}_{\omega' l' m'}^*] = (\delta_{ll'} \delta_{mm'})^{-1} \delta(\omega - \omega') . \quad (4.30)$$

Desta forma, exigindo que os modos $u_{\omega lm}(x^\alpha)$ sejam ortonormalizados por este produto interno de Klein-Gordon de acordo com (4.23)-(4.24), segue que

$$\left[\hat{a}_{\omega lm}, \hat{a}_{\omega' l' m'}^\dagger \right] = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') . \quad (4.31)$$

Com o mesmo procedimento, podemos obter também que

$$[\hat{a}_{\omega lm}, \hat{a}_{\omega' l' m'}] = \left[\hat{a}_{\omega lm}^\dagger, \hat{a}_{\omega' l' m'}^\dagger \right] = 0 . \quad (4.32)$$

O vácuo de Boulware [21], $|0\rangle_B$, é o estado quântico no qual observadores estáticos fora do horizonte de eventos do buraco negro não medem nenhuma partícula. Ele é o estado aniquilado por todos os operadores $\hat{a}_{\omega lm}$,

$$\hat{a}_{\omega lm} |0\rangle_B = 0 . \quad (4.33)$$

O espaço de Fock usual é então construído aplicando-se os operadores de criação sobre este estado de vácuo.

4.2 Forma assintótica normalizada dos modos $u_{\omega lm}$

Encontraremos agora a solução geral de (4.11). Ressalte-se que tal solução não pode ser expressa em termos de funções especiais disponíveis na literatura. Porém, nas regiões assintóticas, isto é, muito próximo e muito distante do horizonte de eventos, conseguimos obter soluções analíticas normalizadas para os modos $u_{\omega lm}$.

Partindo do produto de Klein-Gordon (4.23) e usando (4.9), (4.17) e a propriedade (3.19) dos harmônicos esféricos, a saber

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi d\theta d\phi \sin\theta Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} ,$$

obtemos

$$\sigma_{KG}(u_{\omega lm}, u_{\omega' l' m'}) = \frac{\sqrt{\omega\omega'}}{\pi} (\omega + \omega') e^{+i(\omega-\omega')t} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \int_{2M}^{+\infty} \frac{dr}{f} \psi_{\omega l}^*(r) \psi_{\omega' l'}(r) . \quad (4.34)$$

Para resolvermos a integral da equação acima usamos (4.14) e (4.13). Assim, encontramos

$$\int_{2M}^{+\infty} \frac{dr}{f} \psi_{\omega l}^*(r) \psi_{\omega' l'}(r) = -\frac{1}{2M(\omega^2 - \omega'^2)} \left[\psi_{\omega' l'}(x) \frac{d\psi_{\omega l}^*(x)}{dx} - \psi_{\omega l}^*(x) \frac{d\psi_{\omega' l'}(x)}{dx} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} . \quad (4.35)$$

A partir desta última expressão, de (4.23), (4.34) e lembrando a seguinte propriedade da função delta [18]

$$f(x') \delta(x - x') = f(x) \delta(x - x') , \quad (4.36)$$

ficamos com

$$\frac{1}{(\omega - \omega')} \left[\psi_{\omega' l'}(x) \frac{d\psi_{\omega l}^*(x)}{dx} - \psi_{\omega l}^*(x) \frac{d\psi_{\omega' l'}(x)}{dx} \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} = -\frac{2M\pi}{\omega} \delta(\omega - \omega') , \quad (4.37)$$

que nos permite obter a normalização da forma assintótica de $\psi_{\omega l}(x)$ e, por conseguinte, de $u_{\omega lm}(x^\alpha)$.

Podemos notar que o potencial (4.12) anula-se tanto para $r \rightarrow 2M$ ($x \rightarrow -\infty$) como para $r \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow +\infty$). Assim, nas regiões muito próximas e muito distantes do horizonte de eventos, os modos provenientes do horizonte passado H^- , e os modos provenientes do infinito passado \mathcal{I}^- , indexados respectivamente por $n = \rightarrow, \leftarrow$, são dados por [22]:

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\rightarrow} (e^{2iM\omega x} + R_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-2iM\omega x}) & (x \ll -1), \\ 2^{i^{l+1}} A_{\omega l}^{\rightarrow} T_{\omega l}^{\rightarrow} M\omega x h_l^{(1)}(2M\omega x) & (x \gg 1), \end{cases} \quad (4.38)$$

e

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\leftarrow} T_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-2iM\omega x} & (x \ll -1), \\ 2A_{\omega l}^{\leftarrow} M\omega x \left[(-i)^{l+1} h_l^{(1)*}(2M\omega x) + i^{l+1} R_{\omega l}^{\leftarrow} h_l^{(1)}(2M\omega x) \right] & (x \gg 1), \end{cases} \quad (4.39)$$

em que $|R_{\omega l}^n|^2$ e $|T_{\omega l}^n|^2$ são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente, os quais satisfazem as relações

$$|R_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 + |T_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = 1 ,$$

e

$$|R_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 + |T_{\omega l}^{\rightarrow}|^2 = 1 .$$

Temos que $h_l^{(1)}$ é a função esférica de Hankel ou função esférica de Bessel de terceiro tipo [18], dada por

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + i\eta_l(x) . \quad (4.40)$$

Vale notar que nas regiões assintóticas ($|x| \gg 1$) podemos usar a seguinte aproximação:

$$h_l^{(1)}(x) \approx (-1)^{l+1} \frac{e^{ix}}{x} .$$

Assim, substituindo essa aproximação em (4.38) e (4.39), obtemos

$$\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\rightarrow} (e^{2iM\omega x} + R_{\omega l}^{\rightarrow} e^{-2iM\omega x}) & (x \ll -1) , \\ A_{\omega l}^{\rightarrow} T_{\omega l}^{\rightarrow} e^{2iM\omega x} & (x \gg 1) , \end{cases} \quad (4.41)$$

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\leftarrow} T_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-2iM\omega x} & (x \ll -1) , \\ A_{\omega l}^{\leftarrow} (e^{-2iM\omega x} + R_{\omega l}^{\leftarrow} e^{2iM\omega x}) & (x \gg 1) . \end{cases} \quad (4.42)$$

De (4.37), (4.41) e (4.42) obtemos as constantes de normalização das formas assintóticas de $\psi_{\omega l}(x)$, a saber

$$A_{\omega l}^{\leftarrow} = A_{\omega l}^{\rightarrow} = \frac{1}{2\omega} . \quad (4.43)$$

Para tanto, precisamos lembrar da seguinte representação da delta de Dirac [18]:

$$\delta(k - k_o) = \left(\frac{\text{sen}[(k - k_o)x]}{\pi(k - k_o)} \right)^{x \rightarrow +\infty} . \quad (4.44)$$

A forma assintótica normalizada dos modos $u_{\omega l m}(x^\alpha)$ é então obtida substituindo os resultados encontrados nesta seção em (4.9).

4.3 A potência emitida usando TQC em Schwarzschild

4.3.1 Expressão analítica da potência emitida

Analisaremos agora a potência emitida por uma fonte em movimento circular ao redor de um buraco negro sem carga e com momento angular nulo (espaço-tempo de Schwarzschild). De

forma análoga ao caso analisado em Minkowski, a fonte localiza-se em $r = R$ com velocidade angular constante $\Omega > 0$ (medida por observadores estáticos no infinito), restrita ao plano $\theta = \pi/2$, descrita pelas seguintes corrente e 4-velocidade:

$$j(x^\alpha) = \frac{q}{\sqrt{-g}u^0} \delta(r - R) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\varphi - \Omega t) , \quad (4.45)$$

$$u^\alpha(\Omega, R) = \frac{1}{(f(R) - R^2\Omega^2)^{1/2}} (1, 0, 0, \Omega) , \quad (4.46)$$

respectivamente.

Assumindo mais uma vez o acoplamento mínimo da fonte $j(x^\alpha)$ com o campo escalar $\hat{\Phi}(x^\alpha)$, a amplitude de emissão de uma partícula com números quânticos ω, l, m , devida à interação do campo quântico com a fonte é:

$$A_{\omega lm}^S = \langle 1; \omega lm | i \int d^4x \sqrt{-g} j(x^\alpha) \hat{\Phi}(x^\alpha) | 0 \rangle_B , \quad (4.47)$$

em que o estado inicial é o vácuo de Boulware. Usando a expansão do campo escalar quântico inicial (4.21), as atuações dos operadores criação e aniquilação no estado de vácuo, dadas, respectivamente, por

$$\hat{a}_{\omega' l' m'}^\dagger | 0 \rangle_B = | 1; \omega' l' m' \rangle , \quad (4.48)$$

$$\hat{a}_{\omega' l' m'} | 0 \rangle_B = 0 , \quad (4.49)$$

e que os estados do espaço de Fock são ortonormalizados, encontramos

$$A_{\omega lm}^S = i \int d^4x \sqrt{-g} j(x^\alpha) u_{\omega lm}^*(x^\alpha) . \quad (4.50)$$

De (4.1), (4.9), (3.30), (3.31) e (4.45) podemos reescrever a equação acima como

$$A_{\omega lm}^S = 2i\pi q \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} \frac{1}{u^0(R)} \frac{\psi_{\omega l}^*(R)}{R} C_{lm} P_l^m(0) \delta(\omega - m\Omega) . \quad (4.51)$$

A potência emitida para um valor fixo de momento angular, assim como calculada por observadores estáticos assintóticos, é dada por (3.33)

$$W_{lm}^S = \int_0^{+\infty} d\omega \omega \frac{|A_{\omega lm}^S|^2}{T} ,$$

na qual $T = 2\pi\delta(0)$ é o tempo total assim como medido por estes observadores. Usando (4.51) nesta última equação obtemos

$$W_{lm}^S = 2q^2 m^2 \Omega^2 [f(R) - R^2\Omega^2] \frac{|\psi_{\omega_0 l}(R)|^2}{R^2} |Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2 , \quad (4.52)$$

com $\omega_0 = m\Omega$ e $l, m \geq 1$. Notemos que [18] $Y_{lm}(\pi/2, \Omega t) = 0$ para $l + m$ ímpar e

$$|Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l+m-1)!!(l-m-1)!!}{(l+m)!!(l-m)!!}, \quad (4.53)$$

para $l + m$ par. Desta última expressão fica claro que $Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)$ não depende do tempo. Aqui $n!! \equiv n(n-2)\dots 1$, se n for ímpar e $n!! \equiv n(n-2)\dots 2$, se n for par.

Percebe-se então que, para o cálculo da potência irradiada pela fonte girante $j(x^\alpha)$, precisamos das soluções $\psi_{\omega l}(r)$ de (4.14). No entanto, a solução geral de (4.14) não pode ser expressa em termos de funções especiais conhecidas [23]. Nossa estratégia, a qual será mostrada na subseção seguinte, será resolver a equação (4.14) numericamente, e, portanto, realizar um cálculo numérico da potência emitida.

Para encerrar esta sub-seção, vamos encontrar a relação $R = R(M, \Omega)$ segundo a relatividade geral, pois esta é importante para a comparação da potência em todos os casos estudados neste trabalho. Com este intento, usaremos a Eq. (2.16) e que o momento angular por unidade de massa definido em (2.12) pode ser reescrito como

$$L = r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) = r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right) = r^2 \Omega u^0, \quad (4.54)$$

com u^0 dado por (4.46). Assim, substituindo (4.54) e (4.46) em (2.16), e depois isolando $r \equiv R_S$, obtemos para as órbitas circulares estáveis e instáveis que

$$R_S = \left(\frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3}. \quad (4.55)$$

4.3.2 Cálculo numérico da potência emitida

Para encontrarmos as soluções numéricas de (4.14) devemos encontrar as soluções provenientes de H^- e \mathcal{J}^- , $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(r)$ e $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(r)$, cujos valores assintóticos sejam compatíveis com as equações (4.41) e (4.42), respectivamente. A seguir apresentaremos um resumo do método numérico utilizado para encontrar as funções radiais $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}$, provenientes do infinito passado tipo luz \mathcal{J}^- .

De (4.42) concluímos que, perto do horizonte de eventos,

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow} \propto \exp(-2iM\omega x) \quad (x \ll -1). \quad (4.56)$$

Iniciaremos então com uma solução de (4.14), proveniente de \mathcal{J}^- , com módulo unitário, dada por

$$\chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x_L) = \exp(-2iM\omega x_L), \quad (4.57)$$

para um valor fixo de ω , com $x_L \ll -1$. Vale ressaltar que (4.57) dada acima não está normalizada. $\chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x_L)$ será a condição inicial na região assintótica próxima ao horizonte futuro H^+ , em que $x \rightarrow -\infty$ ($r \geq 2M$). Devemos então evoluir numericamente esta solução rumo a $x \rightarrow +\infty$ ($r \rightarrow +\infty$), por meio da equação diferencial (4.14). O resultado será, para regiões suficientemente distantes do horizonte (para muito além do máximo do potencial (4.12))

$$\chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x_R) \approx C_{\omega l}^{\leftarrow} \exp(-2iM\omega x_R) + D_{\omega l}^{\leftarrow} \exp(2iM\omega x_R), \quad (4.58)$$

com $x_R \gg 1$, e $|C_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 - |D_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = 1$. (Vale notar, de (4.42) para $x \gg 1$, usando que $h_l^{(1)} \approx (-i)^{l+1} \exp(ix)/x$ neste limite, que $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx [\exp(-2iM\omega x) + R_{\omega l}^{\leftarrow} \exp(2iM\omega x)]/2\omega$.) Calculando a derivada de $\chi_{\omega l}^{\leftarrow}$ (com relação a x), no ponto $x_R \gg 1$, obtemos

$$\frac{d\chi_{\omega l}^{\leftarrow}}{dx}(x_R) \approx -2iM\omega C_{\omega l}^{\leftarrow} \exp(-2iM\omega x_R) + 2iM\omega D_{\omega l}^{\leftarrow} \exp(2iM\omega x_R). \quad (4.59)$$

Desta forma,

$$|C_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = \frac{1}{4} \left[|\chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x_R)|^2 + \frac{1}{4M^2\omega^2} \left| \frac{d\chi_{\omega l}^{\leftarrow}}{dx}(x_R) \right|^2 \right] + \frac{1}{2}, \quad (4.60)$$

e

$$|D_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = \frac{1}{4} \left[|\chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x_R)|^2 + \frac{1}{4M^2\omega^2} \left| \frac{d\chi_{\omega l}^{\leftarrow}}{dx}(x_R) \right|^2 \right] - \frac{1}{2}. \quad (4.61)$$

A função $\chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x)$ não está normalizada. Vamos então multiplicá-la por uma constante de normalização $K_{\omega l}$:

$$K_{\omega l} \chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx \begin{cases} K_{\omega l} e^{-2iM\omega x} & (r \geq 2M), \\ K_{\omega l} (C_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-2iM\omega x} + D_{\omega l}^{\leftarrow} e^{2iM\omega x}) & (x \gg 2M). \end{cases} \quad (4.62)$$

Em seguida, para determinar $K_{\omega l}$, requeremos que as condições de contorno assintóticas de (4.62) sejam compatíveis com (4.42), que podem ser escritas como

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) \approx \begin{cases} A_{\omega l}^{\leftarrow} T_{\omega l}^{\leftarrow} e^{-2iM\omega x} & (x \ll -1), \\ A_{\omega l}^{\leftarrow} (e^{-2iM\omega x} + R_{\omega l}^{\leftarrow} e^{2iM\omega x}) & (x \gg 1). \end{cases} \quad (4.63)$$

Obtemos então que

$$\begin{aligned} K_{\omega l} &= A_{\omega l}^{\leftarrow} T_{\omega l}^{\leftarrow}, \\ C_{\omega l}^{\leftarrow} &= \frac{1}{T_{\omega l}^{\leftarrow}}, \\ D_{\omega l}^{\leftarrow} &= \frac{R_{\omega l}^{\leftarrow}}{T_{\omega l}^{\leftarrow}}. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) = A_{\omega l}^{\leftarrow} T_{\omega l}^{\leftarrow} \chi_{\omega l}^{\leftarrow}(x) . \quad (4.64)$$

Vale ressaltar que o erro numérico deste método será tanto menor quanto maiores os módulos de $x_L < 0$ e $x_R > 0$. Para uniformizarmos este procedimento, para cada valor de ω escolhemos x_L e x_R tais que o potencial $V(r)$, dado em (4.12), seja sempre menor ou igual a 5% de ω^2 , de forma que as exponenciais $e^{\pm 2iM\omega x}$ sejam de fato boas aproximações para $\psi_{\omega l}(x)$. O cálculo do valor numérico de $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}$ é feito de maneira completamente análoga.

Para encontrarmos as amplitudes correspondentes, substituímos as funções radiais $\psi_{\omega l}^{\leftarrow}(r)$ e $\psi_{\omega l}^{\rightarrow}(r)$ em (4.51), obtendo

$$A_{\omega lm}^{n,S} = 2iq\sqrt{\pi\omega}[f(R) - R^2\Omega^2]^{1/2} \frac{\psi_{\omega l}^{n*}(R)}{R} C_{lm} P_l^m(0) \delta(\omega - m\Omega) , \quad (4.65)$$

para $n = \rightarrow, \leftarrow$, em que C_{lm} foi definido em (3.31). Assim, as respectivas potências irradiadas são dadas por

$$W_{lm}^{n,S} = 2q^2 m^2 \Omega^2 [f(R) - R^2 \Omega^2] \frac{|\psi_{\omega_0 l}^{n,S}(R)|^2}{R^2} |Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2 , \quad (4.66)$$

com $\omega_0 = m\Omega$ e $l, m \geq 1$. A expressão para $|Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2$ foi dada em (4.53).

Portanto, a potência irradiada total para valores fixos de momento angular é:

$$W_{lm}^S = \sum_{n=\rightarrow, \leftarrow} W_{lm}^{n,S} = W_{lm}^{\rightarrow,S} + W_{lm}^{\leftarrow,S} . \quad (4.67)$$

Note-se que $W_{lm}^S = 0$ para valores ímpares de $l + m$, uma vez que $|Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2 = 0$ nestes casos.

A potência total emitida é dada por

$$W^S = \sum_{n=\rightarrow, \leftarrow} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^l W_{lm}^{n,S} . \quad (4.68)$$

Usando (4.66), esta pode ser reescrita como

$$W^S = \sum_{n=\rightarrow, \leftarrow} \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^l 2q^2 m^2 \Omega^2 [f(R) - R^2 \Omega^2] \frac{|\psi_{\omega_0 l}^{n,S}(R)|^2}{R^2} |Y_{lm}(\pi/2, \Omega t)|^2 . \quad (4.69)$$

Temos que usar (4.55) para reescrever esta expressão em termos das variáveis medidas assintoticamente M e Ω . Esta potência está mostrada na Fig. 4.1 para diferentes valores do momento angular máximo (l_{max}) do campo. Nas órbitas circulares estáveis a principal contribuição vem dos menores valores de momento angular. Porém, nas órbitas instáveis a contribuição dos maiores valores do momento angular torna-se dominante [24].

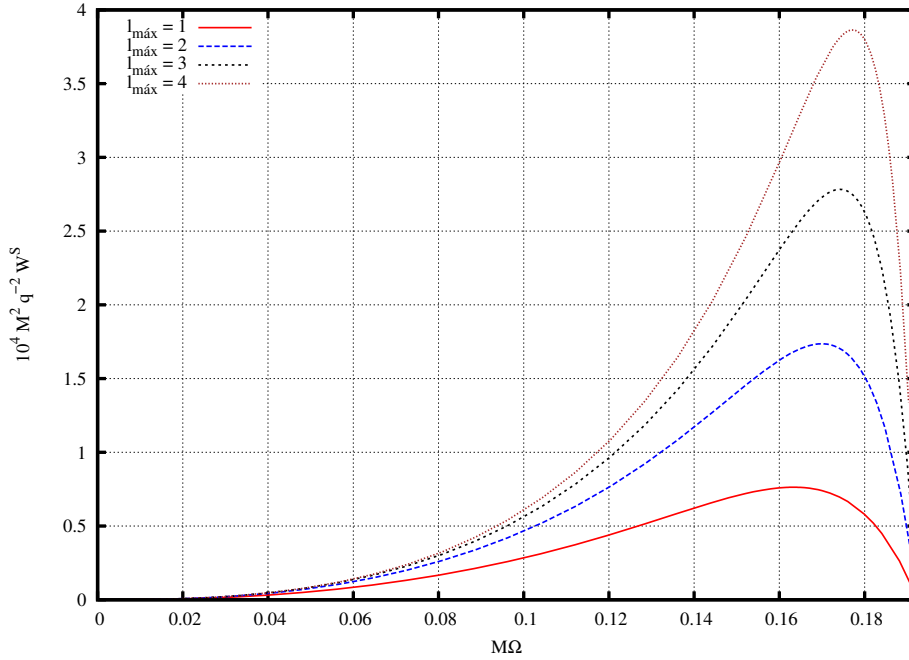


Figura 4.1: As potências emitidas em Schwarzschild com $l_{\max} = 1, 2, 3, 4$, desde o infinito até a última órbita circular instável $R = 3M$ (segundo a relatividade geral).

4.4 Comparação entre potências em Schwarzschild e em Minkowski

Nesta seção vamos comparar o resultado (4.69) obtido em Schwarzschild com os resultados (3.40), (3.44), (3.46) e (3.51) obtidos em Minkowski, para os potenciais de Newton, de Paczyński e Wiita, de Nowak e Wagoner, e de Artemova et al., respectivamente. A Fig. 4.2 mostra razão entre a potência emitida em Schwarzschild W^S e as potências emitidas em Minkowski, W_i^M , assumindo-se os referidos potenciais.

Fica evidente, a partir da Fig. 4.2 que, basicamente, a potência emitida com o uso dos potenciais é maior do que em Schwarzschild. A exceção a esta regra ocorre apenas para a potência emitida no caso do potencial de Nowak e Wagoner, para órbitas muito afastadas do objeto central, até a órbita $M\Omega \approx 0,02$. Além disso, nota-se que para todas as órbitas geodésicas circulares estáveis o potencial de Nowak e Wagoner é o que melhor reproduz os resultados de Schwarzschild (para órbitas até $M\Omega \approx 0,02$ as potências emitidas nos dois casos são numericamente muito próximas). Porém, para as órbitas instáveis nenhum dos potenciais pseudo-newtonianos oferece resultados satisfatórios, e a interação que melhor se adequa ao cálculo em Schwarzschild

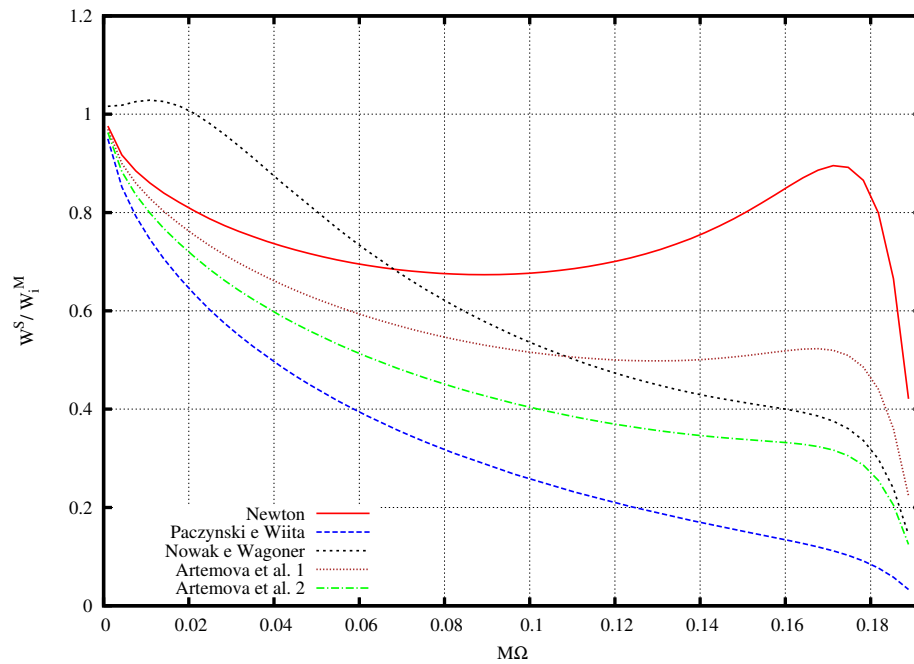


Figura 4.2: As razões entre as potências em Schwarzschild e em Minkowski assumindo diferentes potenciais pseudo-newtonianos.

é a interação newtoniana. O potencial de Paczyński e Wiita, mais utilizado na literatura para analisar discos de acreção, mostra-se como a pior aproximação entre as utilizadas neste estudo.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, usamos diferentes abordagens para analisar a potência emitida por uma partícula orbitando um objeto central. Inicialmente, assumimos que o centro atrator e a fonte girante interagem através dos potenciais newtoniano e pseudo-newtonianos no espaço-tempo de Minkowski. Após isso, assumimos que esta interação ocorre devido a curvatura do espaço-tempo de Schwarzschild, usando a relatividade geral. Assim, o principal objetivo deste trabalho foi investigar a utilidade dos potenciais pseudo-newtonianos na análise da radiação emitida por esta fonte girante. Para tanto, comparamos a potência emitida pela partícula orbitando um objeto estelar em Minkowski, assumindo o potencial newtoniano, e os potenciais pseudo-newtonianos de Paczyński e Wiita, de Nowak e Wagoner e de Artemova et al., e também a potência emitida por uma partícula orbitando um buraco negro de Schwarzschild.

Nossa análise foi feita para todas as órbitas geodésicas circulares estáveis e instáveis, segundo a relatividade geral. Encontramos que as conclusões sobre as aproximações foram diferentes na região estável e na instável.

A partir do que foi exposto nesta dissertação, concluímos que o potencial de Paczyński e Wiita, mais utilizado na literatura para analisar discos de acreção, apesar de reproduzir exatamente algumas características das órbitas do espaço-tempo de Schwarzschild, mostrou-se como a aproximação menos satisfatória para o problema estudado. Assim, concluímos que não podemos usar este potencial para obtermos uma boa aproximação para o problema de uma partícula girando ao redor do buraco negro de Schwarzschild. Para este problema, os potenciais pseudo-newtonianos com os quais obtivemos as melhores aproximações foram o de Nowak e Wagoner, para órbitas estáveis, e o de Newton, para as órbitas instáveis.

Neste trabalho nos restringimos à análise do espaço-tempo de Schwarzschild. Em trabalhos futuros poderemos estender esta análise para espaços-tempos de buracos negros com carga elétrica e com rotação. Outra possibilidade é tentar determinar um potencial pseudo-newtoniano que seja uma aproximação ainda melhor para o estudo da radiação escalar emitida por uma partícula orbitando um buraco negro de Schwarzschild.

Apêndice A

Demonstração da equação (3.37)

Neste apêndice provaremos a relação (3.37), a saber:

$$f(z) = \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^l m^2 [j_l(mz)]^2 |Y_{lm}(\pi/2, \phi)|^2 = \frac{1}{24\pi} \frac{z^2}{(1-z^2)^3} \quad (|z| < 1). \quad (\text{A.1})$$

Note-se que $|Y_{lm}(\pi/2, \phi)|^2 = |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2$ é independente de ϕ .

Começaremos mostrando que

$$f(z) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta [g(z \operatorname{sen}\theta, \phi)]^2, \quad (\text{A.2})$$

em que

$$g(a, \phi) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi \delta'(\phi - \psi + a \operatorname{sen}\psi), \quad (\text{A.3})$$

se $-1 < a < 1$. Pela combinação das fórmulas

$$e^{ikz \cos\gamma} = \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) i^l j_l(kz) P_l(\cos\gamma) \quad (\text{A.4})$$

e

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \psi) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (\text{A.5})$$

nas quais $\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta' + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta' \cos(\phi - \psi)$, e tomando $\theta' = \pi/2$, encontramos

$$e^{ikz \operatorname{sen}\theta \cos(\phi-\psi)} = 4\pi \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kz) Y_{lm}^*(\pi/2, \psi) Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (\text{A.6})$$

Pelo uso da fórmula $(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi e^{i\mu\psi} = \delta(\mu)$, encontramos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi e^{ikz \operatorname{sen}\theta \cos(\phi-\psi) + ik\psi} = 4\pi \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kz) Y_{lm}(\pi/2, 0) Y_{lm}(\theta, \phi) \delta(k-m). \quad (\text{A.7})$$

Multiplicando por k e integrando encontramos

$$\begin{aligned} G(z, \theta, \phi) &\equiv \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi k e^{ikz \operatorname{sen}\theta \cos(\phi-\psi) + ik\psi} \\ &= \sum_{l=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^l i^l m j_l(mz) Y_{lm}(\pi/2, 0) [Y_{lm}(\theta, \phi) - Y_{l,-m}(\theta, \phi)] , \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

em que usamos a convenção $Y_{l,-m}(\theta, 0) = Y_{lm}(\theta, 0)$. Note que esta função é periódica em ϕ , com período 2π . Assumindo a ortonormalidade dos harmônicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$, encontramos

$$f(z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta |G(z, \theta, \phi)|^2 . \quad (\text{A.9})$$

Fazendo a mudança de variável $\psi \rightarrow \psi + \theta$ em (A.8), encontramos

$$\begin{aligned} G(z, \theta, \phi) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi k e^{ik(z \operatorname{sen}\theta \cos\psi + \psi + \phi)} \\ &= -i \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(z \operatorname{sen}\theta \cos\psi + \psi + \phi)} \right] \\ &= -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi \delta'(z \operatorname{sen}\theta \cos\psi + \psi + \phi) . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Pela mudança de variável $\psi \rightarrow \pi/2 - \psi$, obtemos

$$\begin{aligned} G(z, \theta, \phi) &= -\frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi \delta'(\phi + \pi/2 - \psi + z \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi) \\ &= -\frac{i}{4\pi} g(z \operatorname{sen}\theta, \phi + \pi/2) , \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

em que a função $g(a, \phi)$ é definida por (A.3). Substituindo a Eq. (A.11) em (A.9) e usando o fato de $g(a, \phi)$ ser periódica em ϕ , com período 2π , obtemos (A.2).

Por sua vez, a Eq. (A.2) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta [g(z \operatorname{sen}\theta, \phi)]^2 \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi_1 \delta'(\phi - \psi_1 + z \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi_1) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi_2 \delta'(\phi - \psi_2 + z \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi_2) \\ &= -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi_1 \delta(\phi - \psi_1 + z \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi_1) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi_2 \delta''(\phi - \psi_2 + z \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi_2) . \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

A função $\psi - z \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi$ é uma função monotonicamente crescente de ψ para $|z| < 1$, e a equação $\phi = \psi - z \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi$ é satisfeita para $\phi = \psi = 0$ e para $\phi = \psi = 2\pi$. Então, essa equação para ψ possui uma solução com um valor de ϕ no intervalo $[0, 2\pi]$, somente se $0 \leq \psi \leq 2\pi$. Assim, após fazermos a integral em ϕ , a integração em ψ_1 passa a ser feita no intervalo $[0, 2\pi]$. Então, obtemos

$$f(z) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\psi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\psi_2 \delta''(\chi_1 - \chi_2), \quad (\text{A.13})$$

com $\chi_i = \psi_i - z \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi_i$ ($i = 1, 2$). Assim,

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\chi_1 \frac{d\psi_1}{d\chi_1} \int_{-\infty}^{+\infty} d\chi_2 \frac{d\psi_2}{d\chi_2} \delta''(\chi_1 - \chi_2) \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\psi \left[\frac{d^2\psi}{d\chi^2} \right]^2 \frac{d\chi}{d\psi} \\ &= \frac{z^2}{32\pi^2} \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}^3\theta \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\operatorname{sen}^2\psi}{(1 - z \operatorname{sen}\theta \cos\psi)^5}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

em que definimos $\chi = \psi - z \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi$. Integrando por partes com respeito a ψ , encontramos

$$f(z) = \frac{z}{128\pi^2} h(z), \quad (\text{A.15})$$

na qual

$$h(z) = \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}^2\theta \int_0^{2\pi} d\psi \frac{\cos\psi}{(1 - z \operatorname{sen}\theta \cos\psi)^4}. \quad (\text{A.16})$$

Agora calcularemos essa integral. Primeiramente, vamos definir

$$H(z) \equiv \frac{1}{3} \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{(1 - z \operatorname{sen}\theta \cos\psi)^3}. \quad (\text{A.17})$$

A integral em ψ pode ser calculada pelo teorema do resíduo depois da substituição $t = e^{i\psi}$. O resultado é

$$H(z) = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi d\theta \operatorname{sen}\theta \left[\frac{1}{(1 - z^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{z^2 \operatorname{sen}^2\theta}{(1 - z^2 \operatorname{sen}^2\theta)^{5/2}} \right]. \quad (\text{A.18})$$

Então, usando as relações

$$\int \frac{dx}{(a + cx^2)^{3/2}} = \frac{1}{a} \frac{x}{\sqrt{a + cx^2}}, \quad (\text{A.19})$$

$$\int \frac{dx}{(a + cx^2)^{5/2}} = \frac{1}{a^2} \left[\frac{x}{\sqrt{a + cx^2}} - \frac{cx^3}{3(a + cx^2)^{3/2}} \right], \quad (\text{A.20})$$

com $a = 1 - z^2$ e $c = z^2$, em (A.18), e depois substituindo $x = \cos\theta$, obtemos

$$H(z) = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{(1 - z^2)^2}. \quad (\text{A.21})$$

Notando que $h(z) = H'(z)$, encontramos

$$h(z) = \frac{16\pi}{3} \frac{z}{(1 - z^2)^3}. \quad (\text{A.22})$$

Substituindo esse resultado em (A.15), obtemos a (3.37).

Apêndice B

O resultado (3.38) via função de Green

O campo escalar clássico $\phi(x)$, produzido por uma fonte externa $j(x)$ satisfaz a equação de Klein-Gordon não-homogênea

$$\square\phi(x) = j(x) , \tag{B.1}$$

em que $\square = \partial^\alpha\partial_\alpha$. Usaremos o método de Green para solucionar (B.1). Então, faremos a seguinte associação:

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow D(x|x') , \\ j(x) &\rightarrow \delta^4(x - x') , \end{aligned}$$

nos quais $D(x|x')$ é a função de Green, x é o ponto no espaço-tempo no qual queremos determinar o campo $\phi(x)$ e x' é uma variável auxiliar de integração. Substituindo estas associações em (B.1) teremos

$$\square D(x|x') = \delta^4(x - x') . \tag{B.2}$$

A corrente escalar associada a uma fonte pontual seguindo uma linha de mundo $z^\alpha(\tau)$, com 4-velocidade $u^\alpha[z(\tau)] \equiv \frac{dz^\alpha}{d\tau}$, é dada por

$$j(x') = \frac{q}{u^0(x')} \delta(\vec{x}' - \vec{z}(\tau)) , \tag{B.3}$$

em que q é a magnitude da carga escalar associada à corrente.

O campo $\phi(x)$ é dado por

$$\phi(x) = \int d^4x' D(x|x') j(x') . \tag{B.4}$$

Usando (B.3) nesta expressão para o campo, e lembrando que $d^4x' = dx'^0 d\vec{x}'$ podemos reescrever

$$\phi(x) = q \int dx'^0 d\vec{x}' \frac{1}{u^0(x')} \delta(\vec{x}' - \vec{z}(\tau)) D(x|x') . \quad (\text{B.5})$$

Podemos realizar a integral em $d\vec{x}'$ utilizando $\delta(\vec{x}' - \vec{z}(\tau))$ e, como $u^0(x') = \frac{dx'^0}{d\tau}$, temos que

$$\phi(x) = q \int d\tau D(x|z) . \quad (\text{B.6})$$

Com isso, percebemos que para encontrarmos $\phi(x)$ temos que encontrar primeiramente a função de Green $D(x|x')$. Portanto, teremos que resolver (B.2). E, com tal intuito, usaremos a transformada de Fourier tanto da função de Green quanto da função delta,

$$D(x|x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \tilde{D}(k) e^{-ik(x-x')} , \quad (\text{B.7})$$

e

$$\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{-ik(x-x')} . \quad (\text{B.8})$$

Substituindo (B.7) e (B.8) em (B.2), ficamos com

$$\square \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \tilde{D}(k) e^{-ik(x-x')} \right] = \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{-ik(x-x')} .$$

Atuando o operador encontramos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \tilde{D}(k) k^2 e^{-ik(x-x')} &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{-ik(x-x')} \quad \therefore \\ -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk e^{-ik(x-x')} \left[\tilde{D}(k) k^2 + 1 \right] &= 0. \end{aligned}$$

A partir desta expressão encontramos que

$$\tilde{D}(k) = -\frac{1}{k^2} . \quad (\text{B.9})$$

Substituindo (B.9) em (B.7), obtemos

$$D(x|x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int dk \frac{e^{-ik(x-x')}}{k^2} .$$

Porém, sabemos que

$$dk = dk_0 d\vec{k} ,$$

$$k^2 = k_0^2 - |\vec{k}|^2 ,$$

e

$$k_\rho(x - x')^\rho = k_0(x^0 - x'^0) - \vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{x}') .$$

Separando a integral em k_0 da integral em \vec{k} , temos

$$D(x|x') = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d\vec{k} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0(x^0-x'^0)}}{k_0^2 - |\vec{k}|^2} . \quad (\text{B.10})$$

Para resolver a integral em k_0 utilizamos o teorema do resíduo. Inicialmente, imagina-se que k_0 é um número complexo, e resolve-se a seguinte integral no plano complexo

$$\oint dz_0 \frac{e^{-iz_0(x^0-x'^0)}}{z_0^2 - |\vec{k}|^2} .$$

Percebe-se que esta integral possui dois pólos simples, a saber: $z_0 = \pm|\vec{k}|$.

Vamos analisar o comportamento da exponencial quando $R \rightarrow +\infty$:

$$|e^{-iz_0(x^0-x'^0)}| = |e^{-iRe^{i\theta}(x^0-x'^0)}| = |e^{-iR(\cos\theta+i\text{sen}\theta)(x^0-x'^0)}| = |e^{R\text{sen}\theta(x^0-x'^0)}| .$$

Para que a exponencial vá a zero em $R \rightarrow +\infty$, temos as seguintes opções:

$$(x^0 - x'^0) > 0 \Rightarrow \text{sen}\theta < 0 ,$$

ou

$$(x^0 - x'^0) < 0 \Rightarrow \text{sen}\theta > 0 .$$

Assim, ao escolhermos a primeira opção temos que fechar o contorno por baixo, caso contrário, fechamos por cima. Ao escolhermos o caminho r (ver Fig. B.1), se fecharmos o contorno por cima, a integral se anulará, pois não haverá pólos dentro do mesmo. Fechando o contorno por baixo obtemos Então,

$$\oint dz_0 \frac{e^{-iz_0(x^0-x'^0)}}{z_0^2 - |\vec{k}|^2} = \int_{-R}^R dk_0 \frac{e^{-ik_0(x^0-x'^0)}}{k_0^2 - |\vec{k}|^2} + \int_C dz_0 \frac{e^{-iz_0(x^0-x'^0)}}{z_0^2 - |\vec{k}|^2} .$$

Fazendo-se $R \rightarrow +\infty$, a segunda integral vai a zero e, pelo teorema do resíduo,

$$\oint dz_0 \frac{e^{-iz_0(x^0-x'^0)}}{z_0^2 - |\vec{k}|^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0(x^0-x'^0)}}{k_0^2 - |\vec{k}|^2} = -2\pi i \theta(x^0 - x'^0) \sum_i \text{Res}(z_0) . \quad (\text{B.11})$$

Calculando os resíduos, ficamos com

$$\begin{aligned} \text{Res}(-|\vec{k}|) &= \lim_{k_0 \rightarrow -|\vec{k}|} (k_0 + |\vec{k}|) \frac{e^{-ik_0(x^0-x'^0)}}{(k_0 + |\vec{k}|)(k_0 - |\vec{k}|)} , \\ \text{Res}(-|\vec{k}|) &= -\frac{e^{i|\vec{k}|(x^0-x'^0)}}{2|\vec{k}|} . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Analogamente, para o outro pólo, encontramos

$$\text{Res}(|\vec{k}|) = \frac{e^{-i|\vec{k}|(x^0-x'^0)}}{2|\vec{k}|} . \quad (\text{B.13})$$

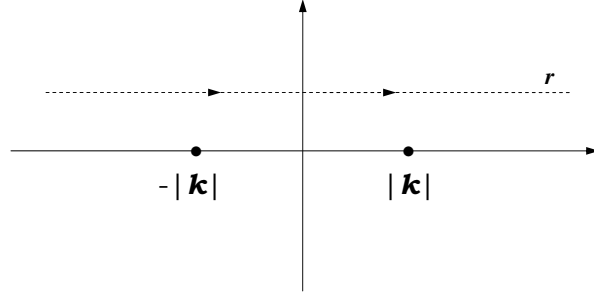


Figura B.1: O caminho r no plano complexo.

Substituindo (B.12) e (B.13) em (B.11)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0(x^0-x'^0)}}{k_0^2} = -\frac{\pi i}{|\vec{k}|} \theta(x^0-x'^0) \left[e^{-i|\vec{k}|(x^0-x'^0)} - e^{i|\vec{k}|(x^0-x'^0)} \right], \quad (\text{B.14})$$

em que $\theta(x^0-x'^0)$ é a função de Heaviside [18]. Voltando para a função de Green (B.10), temos

$$D(x|x') = \frac{\pi i}{(2\pi)^4} \theta(x^0-x'^0) \int d^3\vec{k} \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}}{|\vec{k}|} \left[e^{-i|\vec{k}|(x^0-x'^0)} - e^{i|\vec{k}|(x^0-x'^0)} \right].$$

Usando que $d^3\vec{k} = |\vec{k}|^2 \text{sen}\theta d|\vec{k}| d\theta d\varphi$, e denotando $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{r}$, ficamos com

$$D(x|x') = \frac{\pi i}{(2\pi)^4} \theta(x^0-x'^0) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \text{sen}\theta \int_0^{+\infty} d|\vec{k}| |\vec{k}| e^{i|\vec{k}|r \cos\theta} \left[e^{-i|\vec{k}|(x^0-x'^0)} - e^{i|\vec{k}|(x^0-x'^0)} \right],$$

Note-se que a integral em φ é direta, e nos conduz a

$$D(x|x') = \frac{\pi i}{(2\pi)^3} \theta(x^0-x'^0) \int_0^{+\infty} d|\vec{k}| |\vec{k}| \left[e^{-i|\vec{k}|(x^0-x'^0)} - e^{i|\vec{k}|(x^0-x'^0)} \right] \int_0^\pi d\theta \text{sen}\theta e^{i|\vec{k}|r \cos\theta}.$$

A integral em θ é resolvida fazendo-se a seguinte substituição: $u = i|\vec{k}|r \cos\theta$. Assim, encontramos

$$D(x|x') = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{\theta(x^0-x'^0)}{r} \int_0^{+\infty} d|\vec{k}| \left[e^{-i|\vec{k}|(x^0-x'^0+r)} - e^{-i|\vec{k}|(x^0-x'^0-r)} \right] +$$

$$-e^{i|\vec{k}|(x^0-x'^0-r)} + e^{i|\vec{k}|(x^0-x'^0+r)} \Big] .$$

Reparametrizando as duas últimas integrais de forma que $|\vec{k}| = -|\vec{k}'|$, podemos escrever

$$D(x|x') = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{\theta(x^0 - x'^0)}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} d|\vec{k}| \left[e^{-i|\vec{k}|(x^0-x'^0+r)} - e^{-i|\vec{k}|(x^0-x'^0-r)} \right] ,$$

e estas duas integrais nada mais são do que deltas de Dirac, assim como definidas em (B.8).

Desta forma,

$$D(x|x') = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{\theta(b^0)}{r} 2\pi [\delta(b^0 + r) - \delta(b^0 - r)] ,$$

na qual $b^0 = x^0 - x'^0$. Como $b^0 > 0$, a função de Heaviside é nula na parte negativa do domínio, anulando a primeira delta, pois é justamente nessa parte que essa é diferente de zero, ou seja,

$$D(x|x') = \frac{\pi}{(2\pi)^2} \frac{\delta(b^0 - r)}{r} . \quad (\text{B.15})$$

Vamos escrever a função de Green na forma covariante. Para tanto usaremos a seguinte propriedade da delta de Dirac:

$$\delta(t^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(t - a) + \delta(t + a)] . \quad (\text{B.16})$$

Para o presente caso temos que

$$\delta(b^{02} - r^2) = \frac{1}{2r} [\delta(b^0 - r) + \delta(b^0 + r)] .$$

Utilizando a função de Heaviside, podemos escrever

$$\delta(x^0 - x'^0 - r) = 2r\theta(x^0 - x'^0)\delta[(x - x')^2] . \quad (\text{B.17})$$

Substituindo (B.17) em (B.15), obtemos

$$D(x|x') = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0 - x'^0) \delta[(x - x')^2] , \quad (\text{B.18})$$

ou, usando a seguinte propriedade da delta [18]

$$\delta(\sigma(\tau)) = \sum_i \frac{\delta(\tau - \tau_i)}{|\dot{\sigma}|_{\tau_i}} , \quad (\text{B.19})$$

podemos reescrever (B.18) como

$$D(x|x') = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(\tau - \tau_0)}{|2(x_\alpha - x'_\alpha)u^\alpha|} . \quad (\text{B.20})$$

Usando esta forma da função de Green em (B.6) encontramos que o campo é dado por

$$\phi(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{|[x_\alpha - z_\alpha(\tau_0)]u^\alpha|} . \quad (\text{B.21})$$

A potência emitida W é dada pelo fluxo do 3-vetor de Poynting \vec{S} através da superfície esférica bidimensional (no sistema inercial de coordenadas) com o centro na posição da fonte $j(x)$ e raio $|\vec{R}|$. Sendo assim,

$$W = \int d\vec{f} \cdot \vec{S}, \quad (\text{B.22})$$

em que

$$S^i = (\nabla^0 \phi) (\nabla^i \phi) = -(\partial_t \phi) (\partial_i \phi) \quad (\text{B.23})$$

são as componentes T^{0i} do tensor energia-momento do campo escalar neutro [25] e $d\vec{f}$ é o elemento de área da superfície esférica.

Para obtermos S^i , devemos então calcular inicialmente $\partial_\alpha \phi(x)$, sendo $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Derivando (B.6) com respeito à x^α obtemos

$$\partial_\alpha \phi(x) = \int d\tau [\partial_\alpha D(x|z)] . \quad (\text{B.24})$$

Usando a regra da cadeia, podemos escrever:

$$\partial_\alpha D(x|z) = \frac{\partial D(x|z)}{\partial [(x-z)^2]} \frac{\partial [(x-z)^2]}{\partial x^\alpha} = \frac{dD(x|z)}{d\tau} \frac{d\tau}{d[(x-z)^2]} \frac{\partial [(x-z)^2]}{\partial x^\alpha} . \quad (\text{B.25})$$

Sabendo que z^α descreve a linha de mundo da fonte e x^α é a localização do campo atrasado gerado pela fonte, teremos, $u^\alpha \equiv \frac{dz^\alpha}{d\tau}$ e $\frac{dx^\alpha}{d\tau} = 0$. Portanto,

$$\frac{d\tau}{d[(x-z)^2]} = \frac{-1}{2(x^\beta - z^\beta) u_\beta} , \quad (\text{B.26})$$

$$\frac{\partial [(x-z)^2]}{\partial x^\alpha} = 2(x_\alpha - z_\alpha) . \quad (\text{B.27})$$

Desta forma, obtemos, de (B.24)-(B.27), que

$$\partial_\alpha \phi(x) = -q \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[\frac{dD(x|z(\tau))}{d\tau} \right] \frac{(x_\alpha - z_\alpha(\tau))}{(x^\beta - z^\beta(\tau)) u_\beta} . \quad (\text{B.28})$$

Integrando por partes a expressão acima, obtemos

$$\partial_\alpha \phi(x) = -q \left[\frac{(x_\alpha - z_\alpha)}{(x^\beta - z^\beta) u_\beta} D(x|z(\tau)) \right]_{\tau \rightarrow -\infty}^{\tau \rightarrow +\infty} + q \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau D(x|z(\tau)) \left\{ \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(x_\alpha - z_\alpha)}{(x^\beta - z^\beta) u_\beta} \right] \right\} .$$

O primeiro termo à direita desta igualdade vai a zero devido às contribuições em $\tau \rightarrow \pm\infty$ se anularem. Daí, encontramos:

$$\partial_\alpha \phi(x) = q \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau D(x|z(\tau)) \left\{ \frac{d}{d\tau} \left[\frac{(x_\alpha - z_\alpha)}{(x^\beta - z^\beta) u_\beta} \right] \right\} . \quad (\text{B.29})$$

Efetuando a derivada com relação a τ e usando (B.20) encontramos

$$\partial_\alpha \phi(x) = -\frac{q}{4\pi} \frac{[(x_\beta - z_\beta)(u^\beta u_\alpha + \delta_\alpha^\beta)]}{[(x_\rho - z_\rho)u^\rho]^3} \Big|_{\tau=\tau_0} - \frac{q}{4\pi} \frac{(x_\alpha - z_\alpha)(x_\beta - z_\beta)}{[(x_\rho - z_\rho)u^\rho]^3} \frac{du^\beta}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (\text{B.30})$$

Podemos notar que o primeiro termo à direita da igualdade em (B.30) é proporcional à $|\vec{R}|^{-2}$, enquanto que o segundo termo é proporcional à $|\vec{R}|^{-2}$. Assim, ao analisarmos regiões espacialmente distantes da fonte, $|\vec{R}| \gg 1$, o termo que contém a 4-aceleração é dominante. Como a radiação é identificada como sendo a contribuição que sobrevive assintoticamente, consideraremos que

$$\partial_\alpha \phi(x) \approx -\frac{q}{4\pi} \frac{(x_\alpha - z_\alpha)(x_\beta - z_\beta)}{[(x_\rho - z_\rho)u^\rho]^3} \frac{du^\beta}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (\text{B.31})$$

Definindo $\zeta \equiv (x_\rho - z_\rho)u^\rho$, podemos escrever

$$\partial_\alpha \phi(x) = -\frac{q}{4\pi} \frac{(x_\alpha - z_\alpha)}{\zeta^3} \left[(x_0 - z_0) \frac{du^0}{d\tau} + (x_i - z_i) \frac{du^i}{d\tau} \right]_{\tau=\tau_0}, \quad (\text{B.32})$$

na qual decomposemos $(x_\beta - z_\beta) \frac{du^\beta}{d\tau}$ em componentes espaciais e temporal. Definindo $R^\alpha \equiv (x^\alpha - z^\alpha(\tau))$, usando a métrica (3.2) e que $(x^\alpha - z^\alpha)$ é um 4-vetor tipo-luz obtemos que

$$R^2 = R^\alpha R_\alpha = (x^\alpha - z^\alpha)(x_\alpha - z_\alpha) = 0 \quad \therefore$$

$$(x^0 - z^0)^2 = |\vec{x} - \vec{z}(\tau)|^2.$$

Denotando $(\vec{x} - \vec{z}(\tau)) \equiv \vec{R}$ e $|\vec{x} - \vec{z}(\tau)| \equiv |\vec{R}|$, temos, então:

$$(x^0 - z^0) = (x_0 - z_0) = |\vec{R}|,$$

$$(x_i - z_i) = -(x^i - z^i) = -|\vec{R}|(\hat{R})^i.$$

Podemos também obter que

$$\frac{du^0}{d\tau} = \frac{dz^0}{d\tau} \frac{du^0}{dz^0} = \gamma^4 (\vec{v} \cdot \vec{a}), \quad (\text{B.33})$$

e

$$\frac{du^i}{d\tau} = \frac{dz^0}{d\tau} \left[\frac{d}{dz^0} \left(\frac{dz^0}{d\tau} \frac{dz^i}{dz^0} \right) \right] = \gamma^4 (\vec{v} \cdot \vec{a}) v^i + \gamma^2 a^i, \quad (\text{B.34})$$

nas quais utilizamos as definições $v^i \equiv dz^i/dz^0$ e $a^i \equiv dv^i/dz^0$. Usando estas expressões, podemos reescrever (B.32) na seguinte forma:

$$\partial_\alpha \phi(x) = -\frac{q}{4\pi} \frac{(x_\alpha - z_\alpha)}{\zeta^3} |\vec{R}| \gamma^2 \left[\gamma^2 (\vec{v} \cdot \vec{a}) (1 - \vec{v} \cdot \hat{R}) - (\hat{R} \cdot \vec{a}) \right]_{\tau=\tau_0}. \quad (\text{B.35})$$

Como nosso objetivo é encontrar a radiação escalar emitida para o caso no qual o referencial inercial está instantaneamente em repouso com a fonte acelerada, $\vec{v} = \vec{0}$, temos

$$\partial_\alpha \phi(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{(x_\alpha - z_\alpha)}{|\vec{R}|^2} (\hat{R} \cdot \vec{a}) \Big|_{\tau=\tau_0}, \quad (\text{B.36})$$

em que usamos que $\gamma(\vec{v} = \vec{0}) = 1$, e $\zeta(\vec{v} = \vec{0}) = |\vec{R}|$. Desta forma, temos para as componentes temporal e espacial:

$$\partial_t \phi(x) = \frac{q}{4\pi} \frac{(\hat{R} \cdot \vec{a})}{|\vec{R}|} \Big|_{\tau=\tau_0}, \quad (\text{B.37})$$

$$\partial_i \phi(x) = -\frac{q}{4\pi} R^i \frac{(\hat{R} \cdot \vec{a})}{|\vec{R}|^2} \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (\text{B.38})$$

Portanto, com estes resultados, o vetor de Poynting em (B.23) assume a forma

$$\vec{S} = \frac{q^2}{16\pi^2 |\vec{R}|^2} (\hat{R} \cdot \vec{a})^2 \hat{R} \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (\text{B.39})$$

Podemos agora encontrar a energia irradiada por unidade de tempo coordenado z_0 . Visto que a emissão apresenta simetria esférica, podemos fazer $d\vec{f} \equiv df \hat{R}$, onde $df \equiv |\vec{R}|^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, e θ é escolhido como sendo o ângulo entre a 3-aceleração \vec{a} e o vetor unitário \hat{R} , e φ é o ângulo azimutal correspondente. Portanto,

$$W = \int df^i S^i = \int d\theta d\varphi \sin\theta |\vec{R}| S^i R^i. \quad (\text{B.40})$$

Usando (B.39) e que $(\hat{R} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}| \cos\theta$, encontramos

$$W = \frac{q^2}{16\pi^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\hat{R} \cdot \vec{a})^2 \sin\theta d\theta d\varphi \quad \therefore$$

$$W = -\frac{q^2 |\vec{a}|^2}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2\theta d(\cos\theta) \quad .$$

Realizando as integrais angulares terminamos com

$$W = \frac{q^2}{12\pi} |\vec{a}|^2. \quad (\text{B.41})$$

Vamos agora generalizar a Eq. (B.41) para torná-la um invariante de Lorentz que se reduza ao caso não-relativístico no limite $\vec{v} \rightarrow \vec{0}$. A expressão desejada é

$$W = \frac{q^2}{12\pi} \alpha^2, \quad (\text{B.42})$$

sendo α a aceleração própria da fonte, definida por

$$\alpha = \sqrt{-\frac{du^\alpha}{d\tau} \frac{du_\alpha}{d\tau}}. \quad (\text{B.43})$$

No caso geral, temos de (B.33) e (B.34) que

$$\alpha^2 = -\gamma^8(\vec{v} \cdot \vec{a})^2 + [\gamma^4(\vec{v} \cdot \vec{a})v^i + \gamma^2 a^i]^2 . \quad (\text{B.44})$$

Desta expressão podemos perceber que, ao tomarmos o limite $\vec{v} \rightarrow \vec{0}$, teremos $\alpha^2 \rightarrow |\vec{a}|^2$, o que mostra que (B.42) se reduz a (B.41). Tomando o movimento da fonte como sendo o MCU, a aceleração que a fonte está submetida é a aceleração centrípeta \vec{a}_{cp} . Visto que a aceleração é perpendicular à velocidade, $\vec{v} \cdot \vec{a}_{cp} = 0$, a Eq. (B.44) se reduz a

$$\alpha_{MCU}^2 = \gamma^4 |\vec{a}_{cp}|^2 = \gamma^4 \Omega^4 R^2 . \quad (\text{B.45})$$

É importante ressaltar que Ω é a velocidade angular da fonte, assim como medida por observadores inerciais e R é o raio da trajetória circular da fonte. Substituindo (B.45) em (B.42) encontramos uma expressão da potência irradiada pela fonte que exhibe os termos característicos de um MCU, a saber:

$$W = \frac{q^2 \gamma^4 \Omega^4 R^2}{12\pi} , \quad (\text{B.46})$$

sendo

$$\gamma = \gamma(R, \Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - (\Omega R)^2}} . \quad (\text{B.47})$$

As expressões (B.46)-(B.47) são as mesmas obtidas via teoria quântica de campos em nível de árvore, na seção 3.2.

Referências Bibliográficas

- [1] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford University Press Inc., Nova York (1992).
- [2] R. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago (1984).
- [3] V. P. Frolov e I. D. Novikov, *Black hole physics: Basic concepts and new developments*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998); J. van Paradijs e J. E. McClintock, em *X-Ray Binaries*, editado por W. H. G. Lewin, J. van Paradijs e E. P. J. van den Heuvel, Cambridge University Press, Cambridge (1995); M. J. Rees, em *Black holes and relativistic stars*, editado por R. M. Wald, The University of Chicago Press, Chicago (1998).
- [4] L. C. B. Crispino, A. Higuchi e G.E.A. Matsas, *Class. Quantum Grav.*, **17**, 19 (2000).
- [5] B. Paczyński e P. J. Wiita, *Astron. Astrophys.* **88**, 23 (1980).
- [6] S. K. Chakrabarti e R. Khanna, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **256**, 300 (1992).
- [7] O. Semerák e V. Karas, *Astron. Astrophys.* **343**, 325 (1999).
- [8] E. Guéron e P. S. Letelier, *Astron. Astrophys.* **368**, 716 (2001).
- [9] A. F. Steklain e P. S. Letelier, *Phys. Letters A* **352**, 398 (2006).
- [10] B. Mukhopadhyay, *Astrophysical Journal*, **581**, 427 (2002).
- [11] T. K. Das e A. Sarkar *Astron. Astrophys.* **374**, 1150 (2001).
- [12] J. Fukue, *Publ. Astron. Soc. Japan* **56**, 681 (2004).
- [13] A. M. Nowak e R. V. Wagoner, *Astrophysical Journal* **378**, 656 (1991).

- [14] I. V. Artemova, G. Bjornsson e I.D. Novikov, *Astrophysical Journal* **461**, 565 (1996).
- [15] Keith R. Symon, *Mechanics*, Addison-Wesley Publ. Co., Califórnia (1971).
- [16] M. A. Abramowicz, M. Jaroszyński e M. Sikora, *Astron. Astrophys.* **63**, 221 (1978).
- [17] L. C. B. Crispino. *Quantização a baixas frequências de campos bosônicos no espaço-tempo de Schwarzschild e aplicações*, Tese de Doutorado (IFT-UNESP, 2001).
- [18] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press, London (2005).
- [19] C. Itzykson e J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Inc., Nova York (1980).
- [20] L. Landau e E. Lifshitz, *Teoria do Campo*, Editora Mir, Moscou (1980).
- [21] D. G. Boulware, *Phys. Rev. D* **11**, 1404 (1975).
- [22] A. Higuchi, G. E. A. Matsas e D. Sudarsky, *Phys. Rev. D* **56**, R6071 (1997); **58**, 104021 (1998).
- [23] R. H. Price, *Phys. Rev. D* **5**, 2419 (1972); P. Candelas, *Phys. Rev. D* **21**, 2185 (1980); B. P. Jensen e P. Candelas, *Phys. Rev. D* **33**, 1590 (1986); **35**, 4041 (1987), *erratum*.
- [24] Luís C. B. Crispino, *Phys. Rev. D* **77**, 047503 (2008).
- [25] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover Publications Inc., Nova York (1980).