

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

As Funções do Grupo de Renormalização no Modelo com Auto-Interação Quártica Fermiônica

Leonardo Oliveira do Nascimento

Belém - Pará
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

As Funções do Grupo de Renormalização no Modelo com Auto-Interação Quártica Fermiônica

Leonardo Oliveira do Nascimento

Tese de Mestrado
submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física
da Universidade Federal do Pará

ORIENTADOR: Prof. Dr. Van Sérgio Alves

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Felipe de Medeiros Neto (UFPA)
Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes (IFUSP)
Prof. Dr. Van Sérgio Alves (UFPA)

Belém - Pará
2009

ABSTRACT

Four fermion interactions models have been studied to clarify their conceptual aspects and possible applications in quantum field theory. In this work we present the structure of the renormalization group in the Nambu-Jona-Lasinio model up to 1-loop order. The model is not perturbatively renormalizable in the usual power counting sense, but it is treated as an effective theory, valid in a scale of energy where $p \ll \Lambda$, being p the external moment of the loop and Λ a massive parameter that characterizes the coupling of the non-renormalizable vertex. We clarify the tensorial structure of the interaction vertices and calculate the functions of the renormalization group. The analysis of the fixed points of the theory is also presented using Zimmermann procedure for reducing the coupling constants. We find that the origin is an infrared-stable fixed point at low energies and has also a nontrivial ultraviolet stable fixed point, indicating that the theory could be perturbatively investigated if the momentum is low enough.

RESUMO

Modelos com interações quárticas fermiônicas tem sido estudadas para clarificar aspectos conceituais e possíveis aplicações em teoria quântica de campos. Neste trabalho apresentamos a estrutura do grupo de renormalização no modelo de Nambu-Jona-Lasinio até a ordem de 1-loop. O modelo é não renormalizável perturbativamente, no sentido usual de contagem de potência, mas é tratado como uma teoria efetiva, válida numa escala de energia onde $p \ll \Lambda$, sendo p o momento externo do loop e Λ um parâmetro de escala de massa que caracteriza o acoplamento do vértice não renormalizável. Esclarecemos a estrutura tensorial dos vértices de interação e calculamos as funções do grupo de renormalização. A análise dos pontos fixos da teoria também é apresentada e discutida usando o formalismo de redução das constantes de acoplamento proposto por Zimmermann. Encontramos a baixas energias a origem como ponto fixo infravermelho estável e um ponto fixo não trivial ultravioleta estável, indicando a consistência perturbativa se o momento é pequeno.

Dedicatória,
A minha família, amigos e todas as
pessoas que de alguma forma me
ajudaram nessa caminhada.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Van Sérgio Alves pela orientação, cooperação e estímulo na execução deste trabalho.

Aos meus pais: Jorge e Diva, ao meu irmão Leandro e aos meus amigos e colegas de mestrado, em especial: Soraya e Charles.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará que contribuíram para minha formação no mestrado: Prof. Sérgio Vizeu, Prof. Marcelo Costa e Prof^a Silvana Perez.

Aos professores Prof. Dr. João Felipe de Medeiros Neto e Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes pela disposição em participar da banca.

Sumário

Introdução	8
1 Teorias Efetivas	12
1.1 O que é uma Teoria Efetiva	12
1.2 Operadores Relevantes, Irrelevantes e Marginais	13
1.3 Exemplos de Teorias Efetivas em Teoria Quântica de Campos	14
2 O Modelo e o Grupo de Renormalização	18
2.1 Apresentação do Modelo e Simetrias	18
2.2 Estrutura Geral da Série Perturbativa	18
2.2.1 As Regras de Feynman	18
2.2.2 A Contagem de Potência dos Diagramas e a Regularização	19
2.3 O Grupo de Renormalização e a Teoria Efetiva	22
2.3.1 A Equação do Grupo de Renormalização e a Validade da Teoria Efetiva	22
2.3.2 As Funções do Grupo de Renormalização	24
3 Funções de Green	27
3.1 De Dois Pontos	27
3.2 De Quatro Pontos	29
3.2.1 Determinação dos Termos de Pólo	29
3.2.2 Cálculo dos diagramas	31
4 Análise dos Pontos Fixos da Teoria	41
4.1 Pontos Fixos da Teoria Não Reduzida	41
4.2 Redução das Constantes de Acoplamento	43
4.2.1 Apresentação do Método	43
4.2.2 Estabilidade dos Pontos Fixos da Teoria Reduzida	46
Conclusão	51

A	Notação no Espaço de Minkowski	53
A.1	Representação e Algumas Propriedades das Matrizes de Dirac	53
A.2	Parâmetros de Feynman e a Regularização Dimensional	54
B	Simetrias do modelo	56
C	Diagramas de Feynman	60
	Referências	70

Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC), como sabemos, é uma teoria que sofre problemas de divergências. A origem matemática do problema é bem conhecida, divergências ocorrem nos cálculos perturbativos porque duas distribuições não podem ser multiplicadas em um mesmo ponto [1]. Explicitamente, as divergências em TQC surgem quando se calcula as correções radiativas de uma determinada função de Green. Elas estão presentes nos loops dos diagramas de Feynman. Existem dois tipos de divergências: a ultravioleta (UV) e a infravermelha (IR). A divergência UV surge quando a amplitude a ser calculada vai ao infinito quando o momento do loop de integração tende ao infinito. Por outro lado, quando a amplitude é infinita para o momento do loop indo a zero, dizemos que há divergência IR. Em geral, as divergências IR aparecem em teorias de campos de massa nula.

Do ponto de vista histórico, foi na Eletrodinâmica Quântica (EDQ) que as divergências apareceram pela primeira vez, e também foi no contexto da EDQ que surgiu a técnica da teoria da renormalização. Podemos citar dois problemas bem conhecidos: catástrofe do ultravioleta (auto-energia do elétron) e a polarização do vácuo (auto-energia do fóton), detectados por Oppenheimer [2] em 1930, ambos os problemas estão relacionados com a criação de partículas virtuais a partir do vácuo, o qual, em TQC possui um caráter dinâmico [3].

Nos anos de 1930 e 40, diversas técnicas foram desenvolvidas para eliminar ou pelo menos contornar os infinitos da TQC . Dentre elas podemos citar o método dos campos compensadores e física da subtração [4], todas com poucos fundamentos matemáticos, e que esbarravam em três pontos cruciais: classificação dos infinitos, manutenção da covariância relativística (ocorria devido ao uso do cut-off) e falta de comprovação experimental. A solução para contornar esses problemas foi encontrada nas técnicas de renormalização, cujo conceito moderno segundo Schwinger e Weinberg [5, 6] consiste num *processo de eliminar os infinitos absorvendo-os dentro de uma redefinição dos parâmetros físicos*, que podem ser massa, intensidade do campo e constante de acoplamento [3].

Mas foi entre 1947 e 1949 que Feynman e Schwinger [6, 7] deram os toques finais na EDQ , que era ao mesmo tempo renormalizável e covariante. Eles foram impulsionados pelo congresso de Shelter Island de 1947 em New York em que Lamb e Retherford [8] apresentaram o resultado de seu experimento para a medida do desdobramento hiperfino entre os dois primeiros estados

excitados do átomo de hidrogênio, que segundo a teoria de Dirac deveriam ser iguais. Entretanto, Lamb e Retherford mostraram que eles diferiam por 1000 MHz, e tal efeito ficou conhecido como “deslocamento Lamb” (Lamb shift). Ainda em 1943, o físico japonês Tomonaga [9] já havia desenvolvido uma teoria similar a de Feynman e Schwinger para a *EDQ* que foi publicada em inglês somente em 1946. No ano de 1949, Dyson [10] mostrou a equivalência entre os dois métodos e conseguiu classificar os infinitos da teoria provando que eles podiam ser renormalizados [3].

Nos anos seguintes a *EDQ* provocou grande entusiasmo entre os físicos e os cálculos foram sendo executados com aproximação cada vez melhor (da ordem de 10^{-10}). Tentou-se também a aplicação dos métodos de renormalização à interação fraca e a interação forte. Atualmente as interações eletromagnética, fraca e forte estão unificadas pelo modelo padrão, permanecendo de fora a gravitação.

A partir desse momento grande parcela da comunidade científica começou a acreditar que a renormalizabilidade deveria ser uma característica fundamental a toda *TQC*. Hoje, sabemos que a renormalizabilidade não é uma característica essencial e que é possível descrever o mundo físico a partir de uma teoria não renormalizável¹ [11]. Bem antes da discussão sobre a renormalizabilidade, Fermi, nos anos de 1930, já usava uma teoria não-renormalizável na aproximação de árvore, envolvendo uma interação corrente \times corrente, na tentativa de explicar o decaimento beta² [1, 12, 13, 14, 15]. É no contexto de teorias não renormalizáveis e suas aplicabilidades que surge o conceito de Teorias de Campos Efetivas. Nesse ponto vale ressaltar que teorias efetivas estão presentes em toda física, como podemos observar no caso da Física Clássica que pode ser pensada como uma teoria efetiva da Relatividade para pequenas velocidades (em outras palavras para uma escala pequena de energia). Outro ponto importante é que teorias efetivas são válidas no limite de baixas energias no qual são tratadas como teorias renormalizáveis [1, 11, 13, 14, 15, 16, 17].

Com relação às interações fortes, a sua dinâmica é descrita pela cromodinâmica quântica (*CDQ*) [18] (para uma revisão geral veja [19]). Para processos de altas energias, como o espalhamento inelástico profundo de léptons-hádrons, a teoria de perturbação tem sido aplicada com notável sucesso [20], pois nesse regime a *CDQ* exibe a liberdade assintótica (a constante de acoplamento torna-se pequena numa escala de pequenas distâncias ou altas energias). Por outro lado, em processos de baixas energias comparada com a massa dos hádrons (ordem de 1 GeV), a *CDQ* apresenta aspectos não perturbativos, tais como o confinamento de quarks e

¹Um dos primeiros grandes defensores dessa idéia foi o físico americano S. Weinberg, prêmio Nobel de Física em 1979 pela unificação do eletromagnetismo e da força fraca (Teoria da Força Eletrofraca).

²O decaimento beta ocorre quando um nêutron decai num próton emitindo um elétron e um anti-neutrino ($n \rightarrow p + e + \bar{\nu}$). A lagrangeana que Fermi utilizava consistia basicamente de quatro férmions, $\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_p \Gamma^A \psi_n)(\bar{\psi}_e \Gamma_A \psi_{\bar{\nu}})$, sendo que em um espaço-tempo 4-dimensional a constante de acoplamento G_F , por critério de contagem de potência, tem dimensão inversa de massa² indicando que a teoria é não renormalizável. As Γ^A são matrizes de Dirac.

gluons e a quebra de simetria quiral, tornando o seu estudo analítico nesse regime muito difícil [21]. Nesse sentido, isto é, no estudo de propriedades da CDQ em baixas energias, em particular na investigação da transição de fase da simetria quiral, é que modelos efetivos para a CDQ tem sido extensivamente estudados nas últimas duas décadas. Entre eles, o mais frequentemente estudado é o modelo de Nambu-Jona-Lasinio [22]. Esse modelo foi originalmente introduzido para descrever píons como estados ligados de um nucleon e um anti-nucleon, e foi criado em analogia à teoria da supercondutividade. Eles apresentam interações quárticas fermiônicas na sua lagrangeana de interação e são estudados especialmente na sua conexão com a quebra da simetria quiral e sua restauração à temperatura e densidade finitas. A termodinâmica desses modelos pode oferecer boas sugestões no entendimento das propriedades térmicas da CDQ , especialmente aquelas relacionadas com a simetria quiral [23]. O mesmo tem sido também investigado em outras condições, tais como, potencial químico finito, acoplamento com um campo de calibre externo, campos gravitacionais e efeitos de tamanho finito sobre a transição de fase [21, 24, 25, 26, 27, 28, 29].

Contudo, modelos com interações quárticas fermiônicas são não renormalizáveis perturbativamente para $D > 2$, sendo D a dimensão do espaço-tempo. Entretanto, quando não existem restrições quanto ao número de campos fermiônicos N , o comportamento ultravioleta das funções de Green desses modelos podem ser melhorados usando a técnica da expansão $1/N$ [30], no qual se incorpora os efeitos de polarização de vácuo e reagrupa-se a série perturbativa em potências de $1/N$. Desta forma, modelos com interações tipo Gross-Neveu [31] e Thirring [32] tornam-se renormalizáveis em $D = 3$. Num espaço-tempo 4-dimensional, entretanto, tal situação não se realiza. Contudo, se tais modelos fossem tratados como teorias efetivas, válida numa escala de energia pequena o bastante, eles podem tornar-se fisicamente relevantes [5], de modo que a teoria, nesta escala de energia, pode ser tratada como uma teoria renormalizável.

Parte desta tese tem como objetivo a construção de uma teoria efetiva de um modelo com auto-interação quártica fermiônica em $D = 4$, até a ordem de 1-loop. Ela está dividida em quatro capítulos e três apêndices. No primeiro capítulo será feita uma revisão de alguns aspectos de teorias efetivas, tomando como base as referências [11, 13, 14, 15, 16, 17].

No capítulo 2 apresentamos o modelo, suas simetrias, as estruturas indiciais e tensoriais para o propagador e para as funções de vértices da teoria, bem como a estrutura dos contra-termos que são gerados nos cálculos perturbativos.

No capítulo 3 nos detemos na apresentação do método utilizado para o cálculo dos diagramas de Feynman para as funções de dois e quatro pontos.

No capítulo 4 fazemos um estudo dos pontos fixos e estabilidade do modelo completo e do sistema reduzido. Neste capítulo será feita uma breve revisão do método de redução das constantes de acoplamento proposto por Zimmermann. Devido a dificuldade em fazer a análise

da estabilidade do modelo geral, com quatro constantes de acoplamento, nos detemos no estudo de um setor da teoria. A escolha do setor foi motivada por ser o único setor, considerando duas interações, em que é possível aplicar a redução de constantes. Os demais fornecem resultados fora das condições de validade da redução.

Os três apêndices estão dispostos na tese para uma melhor explicação e apresentação de alguns pontos contidos nos quatro capítulos, são eles: (i) o Apêndice A faz uma breve revisão sobre a notação e propriedades utilizadas para as matrizes de Dirac no espaço-tempo 4-dimensional de Minkowski, bem como uma tabela com as integrais calculadas por regularização dimensional usadas no cálculo das funções de Green de dois e quatro pontos; (ii) no Apêndice B fazemos uma discussão mais detalhada sobre as simetrias de paridade, conjugação de carga, reversão temporal e quiral do modelo e, por fim; (iii) no Apêndice C fazemos a listagem dos 8 diagramas calculados para a função de Green de dois pontos e os 80 diagramas calculados para a função de Green de quatro pontos, ambos até a ordem de 1-loop.

Por último fazemos uma discussão das conclusões do trabalho e apresentamos as referências utilizadas na realização do mesmo.

Capítulo 1

Teorias Efetivas

1.1 O que é uma Teoria Efetiva

A idéia de teorias efetivas está presente em várias partes da física, um exemplo disso é a Física Newtoniana (*FN*) que pode ser pensada como uma teoria efetiva da Relatividade Einsteiniana (*RE*). Quando estamos interessados em descrever o movimento de um carro cuja velocidade v é muito pequena quando comparada com a velocidade da luz c , $v \ll c$, o problema em questão pode ser tratado usando a *RE*, mas como a escala de energia do experimento é muito pequena (pensando que a energia cinética é proporcional a v) a *FN* cumpre muito bem o papel de descrever tal movimento reproduzindo os mesmos resultados que a *RE* a baixas velocidades (baixas energias) [1].

Em *TQC* a idéia é a mesma e modelos, como o de Nambu-Jona-Lasinio (*NJL*), que são não renormalizáveis¹ e que a princípio possuem baixo poder de predição adquirem um novo significado quando tratados a baixas energias [33], e nessa região podem ser trabalhados como uma teoria renormalizável. No caso do modelo de *NJL* ele poderia ser pensado como uma teoria efetiva da *CDQ* a baixas energias.

Em geral existem dois modos de trabalho na física, um que busca a unificação, uma “teoria mãe” que descreveria qualquer processo físico. Atualmente uma candidata a “teoria mãe” seria a Teoria das Supercordas [1] a qual inclui, às partículas do modelo padrão, partículas de spin dois e com massa zero que são identificadas como grávitons (a suposta partícula mediadora da gravitação). Com isso a Teoria das Supercordas possibilitaria a grande unificação entre as quatro interações fundamentais da natureza: eletromagnética, forte, fraca e gravitacional. Entretanto, essa teoria ainda carece de um bom entendimento para descrição do mundo real [1]. Outro modo de se pensar a física seria considerando que todas as teorias seriam teorias efetivas, válidas numa determinada escala de energia, sendo que uma vez que aumentássemos essa escala diminuiríamos

¹Vale ressaltar que na década de 40, devido ao grande sucesso da *EDQ* que era uma teoria renormalizável, muitos físicos acreditavam que a renormalizabilidade deveria ser uma característica fundamental a toda *TQC*. Assim modelos não renormalizáveis não tinham a importância que possuem hoje em dia para descrever experimentos do mundo real.

o poder de predição da teoria. Deste modo, necessitaríamos de uma nova teoria efetiva para descrever os novos experimentos físicos em questão [1, 11, 13, 14, 15, 16, 17].

1.2 Operadores Relevantes, Irrelevantes e Marginais

Uma forma de classificar um modelo quanto a sua renormalizabilidade é utilizando a classificação da mecânica estatística de operadores relevantes, irrelevantes e marginais. Considerando uma ação efetiva S_Λ , num espaço-tempo D -dimensional, advinda de uma teoria fundamental a partir da separação do campo básico numa região de altas (ϕ_A) e baixas energias (ϕ_B), $\phi = \phi_A + \phi_B$, então [13, 17, 34]

$$\int \mathcal{D}\phi_B \mathcal{D}\phi_A e^{iS_\Lambda(\phi_B, \phi_A)} = \int \mathcal{D}\phi_B e^{iS_\Lambda(\phi_B)},$$

com $e^{iS_\Lambda(\phi_B)} = \int \mathcal{D}\phi_A e^{iS_\Lambda(\phi_B, \phi_A)}$. Assim, expandindo a ação efetiva em termos de operadores locais, chegamos que

$$S_\Lambda = \int d^D x \sum_i g_i \mathcal{O}_i, \quad (1.1)$$

em que a soma é sobre todos os operadores que são permitidos por considerações de simetria [17]. De modo que estamos trabalhando numa região tal que a energia do sistema E é muito menor que o corte no ultravioleta Λ . Ou seja, essa ação é válida no limite de baixas energias $E \ll \Lambda$.

No sistema de unidades naturais temos que a dimensão do operador \mathcal{O}_i em unidade de massa é $[\mathcal{O}_i] = E^d$, sendo d a dimensão canônica do operador, e a dimensão da constante de acoplamento g_i é dada por $[g_i] = E^{D-d}$. Redefinindo a constante de acoplamento como $g_i = \Lambda^{D-d} \lambda_i$ de modo que λ_i desempenha o papel de constante de acoplamento adimensional, temos que de forma esquemática a ação efetiva pode ser escrita dimensionalmente como

$$S_\Lambda = \sum_i \Lambda^{D-d} \lambda_i \int d^D x \mathcal{O}_i \approx \lambda_i \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{d-D}, \quad (1.2)$$

notando que a mesma é adimensional e escrita em termos da série E/Λ . Assim podemos estimar para processos em uma escala de energia E a magnitude de cada termo contido na ação S_Λ usando apenas argumentos dimensionais. Dependendo da dimensão canônica d do operador \mathcal{O}_i , temos três casos a serem analisados: quando (i) $d < D$ temos que a razão $\left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{d-D}$ é um número grande na região em que $E \ll \Lambda$, logo dizemos que o termo é relevante (ou super renormalizável) a baixas energias; se (ii) $d > D$ temos que a razão $\left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{d-D}$ é um número pequeno na região em que $E \ll \Lambda$, logo dizemos que o termo é irrelevante (ou não-renormalizável) a baixas energias e (iii) $d = D$ temos que a razão $\left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{d-D}$ é adimensional, dizemos então que esse termo é importante em qualquer escala de energia, ou marginal (ou renormalizável)[17, 34]. Na tabela (1.1) organizamos essa análise de forma mais resumida.

$d < D$	$d > D$	$d = D$
Relevante	Irrelevante	Marginal
Super Renormalizável	Não Renormalizável	Renormalizável

Tabela 1.1: Resumo das análises de relevante, irrelevante e marginal.

Alguns exemplos em $D = 4$ de operadores relevantes são ϕ^2 ($d = 2$), $\bar{\psi}\psi$ ($d = 3$) e ϕ^3 ($d = 3$); para operadores irrelevantes temos $(\bar{\psi}\psi)^2$ ($d = 6$); e para operadores marginais ϕ^4 ($d = 4$) e $\bar{\psi}\psi\phi$ ($d = 4$)² [13, 14].

1.3 Exemplos de Teorias Efetivas em Teoria Quântica de Campos

A idéia fundamental de uma teoria efetiva é atentar que um dado experimento que a priori poderia ser tratado utilizando uma “teoria geral”, pode ser também tratado via uma teoria que seja apropriada para a escala de energia do experimento em questão. Nesse sentido Kaplan sugere uma lagrangeana efetiva para explicar o porque o céu é azul (Espalhamento Rayleigh). O problema em questão consiste basicamente do espalhamento de fótons de baixas energias ($\approx E_\gamma$) com átomos neutros em seus estados fundamentais. Aqui, baixa energia significa que a energia do fóton é pequena o suficiente para não excitar o estado interno do átomo, ou seja $E_\gamma \ll \Delta E \ll a_0^{-1} \ll M_A$, sendo ΔE a energia de excitação do átomo (da ordem $\alpha^2 m_e$), a_0^{-1} o inverso do raio de Borh (da ordem αm_e), M_A a massa do átomo e α a constante de estrutura fina. A priori, este problema poderia ser explicado usando a lagrangeana da *EDQ*, “teoria mais geral”,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{\eta}(\partial^\mu A_\mu)^2 + e\bar{\psi}A^\mu\psi\gamma_\mu, \quad (1.3)$$

sendo η o parâmetro de fixação de calibre. Mas, como o problema ocorre numa escala de energia baixa, podemos desenvolver uma lagrangeana efetiva para dar conta do mesmo. A referência [14] sugere a seguinte lagrangeana³

$$\mathcal{L} = C_1\phi^+ \phi F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + C_2\phi^+ \phi v^\alpha F_{\alpha\mu}v^\beta F^{\beta\mu} + C_3\phi^+ \phi(v^\alpha\partial_\alpha)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

com $[C_1] = [C_2] = M^{-3}$ e $[C_3] = M^{-4}$ (Uma vez que $[\phi] = M^{3/2}$). Os campos ϕ^+ e ϕ , representam o campo que cria átomos com velocidade v^μ e o campo que destrói átomos com velocidade

²Em unidade de massa, a dimensão canônica do campo fermiônico e escalar são respectivamente, $[\psi] = [\bar{\psi}] = (D-1)/2$ e $[\phi] = (D-2)/2$. Para $D = 4$, temos que $[\bar{\psi}] = [\psi] = 3/2$ e $[\phi] = 1$.

³A lagrangeana deve ser invariante de Lorentz e invariante de calibre.

v^μ , respectivamente. O efeito dominante da lagrangeana efetiva vem dos dois primeiros termos que possuem dimensão canônica igual a sete, não renormalizáveis. O terceiro termo é desprezado uma vez que está amortecido com uma potência de M^4 . A partir dessa consideração o autor consegue chegar em uma seção de choque para o espalhamento em questão

$$\sigma \approx E_\gamma^4 r_0^6, \quad (1.5)$$

sendo E_γ a energia do fóton e r_0 o raio médio do átomo. Como a seção de choque é proporcional a energia do fóton, temos que a luz mais energética será a luz mais espalhada. Nesse caso seria a luz violeta, seguida pela azul. Mas devido a sensibilidade dos bastonetes presentes em nossos olhos vemos o céu azul, ao invés de violeta [35].

Ainda no contexto da *EDQ*, Lepage [11] sugere a construção de uma lagrangeana efetiva que dê conta de explicar os processos de baixas energias envolvidos na *EDQ*. A teoria definida pela lagrangeana (1.3) é válida numa escala de energia Λ_0 . A partir do uso de um cut-off Λ nossa intenção é remover os estados de alta energia da teoria, redefinindo a lagrangeana para dar cabo de tal remoção e levando em consideração agora somente os estados de baixas energias. Para ver como a lagrangeana deve ser redefinida, Lepage calcula alguns processos da *EDQ* representados na figura (1.1). Considerando a correção de 1-loop para o espalhamento da figura (1.1a), temos que a parte que deve ser descartada, correspondente a região de altas energias, é dada por

$$T(k > \Lambda) = -e^3 \int_{\Lambda_0}^{\Lambda} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2} \bar{u}(p') \gamma^\mu \frac{1}{(\not{p}' - \not{k}) - m} A^\mu(p' - p) \gamma_\mu \frac{1}{(\not{p} - \not{k}) - m} \gamma_\mu u(p), \quad (1.6)$$

sendo p e p' os momentos externos para cada linha fermiônica.

Assumindo que os parâmetros massivos sejam muito pequenos comparados ao corte Λ , encontramos que

$$T(k > \Lambda) \approx -e^3 c(\Lambda/\Lambda_0) \bar{u}(p') A^\mu(p' - p) \gamma_\mu u(p), \quad (1.7)$$

com $c(\Lambda/\Lambda_0) = -\frac{\alpha}{6\pi} \log(\Lambda/\Lambda_0)$ e $\alpha = e^2/4\pi$ a constante de estrutura fina do elétron. Para o caso da figura (1.1b) o efeito dos estados de alta energia pode ser simulado por um termo análogo ao mostrado acima. Já para o caso (1.1c) temos que o efeito para altas energias é dado pelo termo $d(\Lambda/\Lambda_0) \frac{\bar{u} \gamma_\mu u \bar{u} \gamma^\mu u}{\Lambda^2}$, que claramente pode ser desprezado uma vez que o mesmo é suprimido por potências de $(p/\Lambda)^2$ já que consideramos $p \ll \Lambda$. Deste modo, a partir da análise de quais diagramas são mais relevantes, o autor sugere que a lagrangeana efetiva para descrever a *EDQ* no limite de baixas de energias seria

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i \not{\partial} - m_\Lambda)\psi - \frac{1}{\eta} (\partial^\mu A_\mu)^2 + e_\Lambda \bar{\psi} A^\mu \psi \gamma_\mu, \quad (1.8)$$

sendo que $m_\Lambda = m[1 + \tilde{c}(\Lambda/\Lambda_0)]$ e $e_\Lambda = e[1 + c(\Lambda/\Lambda_0)]$, com $c(\Lambda/\Lambda_0)$ e $\tilde{c}(\Lambda/\Lambda_0)$ constantes que vêm do cálculos dos diagramas de Feynman na região de altas energias definidos no intervalo de integração de Λ a Λ_0 , como mostrado anteriormente. Assim, construímos uma lagrangeana

efetiva que descreve a EDQ numa escala de baixas energias, sendo que o efeito da remoção dos estados de altas energias é compensado por essas constantes.

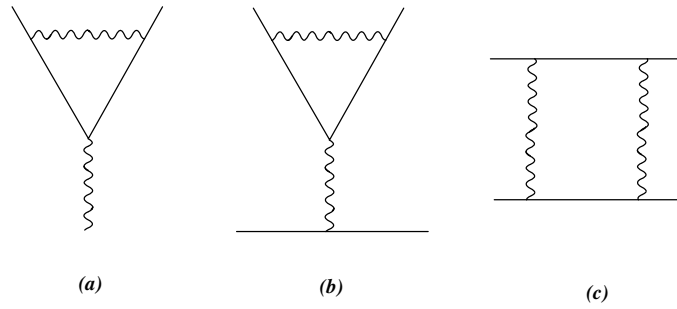


Figura 1.1: (a) Diagrama de correção de vértice, (b) Diagrama de troca de um fóton e (c) Diagrama de troca de dois fótons.

Quando pensamos em teorias de quatro férmions, Fermi, como mencionado anteriormente, já usava uma teoria não-renormalizável (em $D = 4$) na aproximação de árvore envolvendo uma interação corrente \times corrente na tentativa de explicar o decaimento beta. Considerando que a interação é pontual e que a lagrangeana de interação é dada pelo produto dos campos que representam as partículas envolvidas no processo multiplicado por uma constante de acoplamento que possui dimensão inversa de energia², Fermi conseguiu obter a seguinte lagrangeana fenomenológica dada por [12, 13, 14, 15]

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_p \Gamma^A \psi_n) (\bar{\psi}_e \Gamma_A \psi_{\bar{\nu}}), \quad (1.9)$$

sendo que os subscritos n , p , e e $\bar{\nu}$ representam os férmions presentes no decaimento beta (ver figura (1.2)), que são respectivamente: nêutron, próton, elétron e o anti-neutrino. As matrizes Γ_A representam as 16 combinações das matrizes de Dirac. A teoria teve grande sucesso fenomenológico e foi compreendida eventualmente no entendimento da teoria de calibre de interações eletrofracas, que fazem parte do modelo padrão da física de partículas.

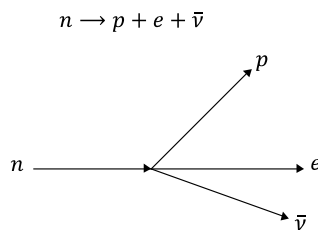


Figura 1.2: Diagrama do Decaimento Beta.

Ainda utilizando teoria de quatro férmions, Pich [13] sugere uma lagrangeana do tipo

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi - \frac{a}{\Lambda^2} (\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{b}{\Lambda^4} (\bar{\psi}\partial^2\psi)(\bar{\psi}\psi) \quad (1.10)$$

sendo que em unidade de massa temos $[(\bar{\psi}\psi)^2] = 6$ e $[(\bar{\psi}\partial^2\psi)(\bar{\psi}\psi)] = 8$ implicando que os mesmos são irrelevantes. Como estamos tratando com uma teoria não-renormalizável sabemos que por correções radiativas haverá o surgimento de contra-termos diferentes daqueles presentes na lagrangeana descrita acima. Como o parâmetro Λ presente na lagrangeana é a princípio arbitrário, vamos considerar que o mesmo seja muito maior que qualquer momento externo p que flua nos vértices dos diagramas de Feynman do modelo, ou seja $p \ll \Lambda$. Pela condição anterior que corresponde ao limite de baixas energias, termos como $(\bar{\psi}\partial^2\psi)(\bar{\psi}\psi)$ amortecidos por potências Λ^4 poderão ser desprezados. Assim, a primeira contribuição diferente da trivial (diagrama de árvore) para as funções de vértices poderá ser dada somente pelo setor da lagrangeana proporcional a interação $(\bar{\psi}\psi)^2$.

Tomando como exemplo o diagrama de auto-energia para esta teoria mostrada na figura (1.3) temos que a contribuição divergente para a massa do férmion é dada por

$$\delta m \approx 2i \frac{a}{\Lambda^2} \int_0^\infty \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k^2 - m^2}. \quad (1.11)$$

Como a integral diverge de forma quadrática e como nesse diagrama não entra momento externo no loop, essa amplitude claramente dará uma contribuição a massa da férmion, $\delta m \approx \frac{m}{\Lambda^2} \Lambda^2 \approx m$.

Efetivamente, como interações não-renormalizáveis se caracterizam por possuírem uma constante de acoplamento com dimensão negativa (em unidade de massa), em $D = 4$ a constante de acoplamento terá forma g/Λ^2 , sendo g agora adimensional. Por outro lado, os contra-termos induzidos pelo processo de renormalização vêm acompanhados de potências da forma $\left(\frac{(m,p)^{d(\gamma)}}{\Lambda^{2n}}\right)$, sendo m a massa, p o momento externo, $d(\gamma)$ o grau de divergência superficial e n a ordem de perturbação. Λ é um parâmetro de escala de massa que caracteriza o acoplamento de um vértice não-renormalizável. Assim, se $p \ll \Lambda \approx m$ o efeito de potências maiores em p/Λ^2 será atenuado. Desta forma, poderemos construir uma teoria efetiva, não como expansão nos operadores como visto na seção 1.2, mas como uma expansão no inverso da potência de Λ . Isto será melhor discutido no próximo capítulo.

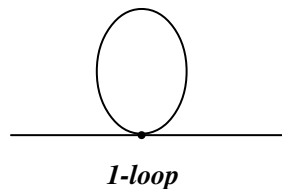


Figura 1.3: Diagrama de auto-interação.

Capítulo 2

O Modelo e o Grupo de Renormalização

2.1 Apresentação do Modelo e Simetrias

A partir das identidades de Fierz sobre férmions no espaço de Dirac, cor e sabor, pode-se mostrar que o modelo que descreve a mais geral auto-interação quártica com simetria interna $SU(N_c) \otimes SU(N_f)$ [24, 36] é dada pela lagrangeana do modelo de Nambu-Jona-Lassinio (*NJJ*)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi + G_1(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + G_2(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda^a\psi)^2 + G_3(\bar{\psi}\gamma^5\lambda^a\psi)^2 + G_4(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\lambda^a\psi)^2, \quad (2.1)$$

sendo λ^a , $a = 1, \dots, N^2 - 1$ os geradores do grupo $SU(N)$ cor. Em um espaço tempo quadridimensional as constantes de acoplamento G_1, \dots, G_4 tem dimensão M^{-2} em unidade de massa¹ indicando pelo critério de contagem de potência que a teoria é não-renormalizável [1, 12, 37, 38, 39]. Isto implica que o número de contra-termos necessários para tornar as amplitudes de Feynman finitas aumentam com a ordem de perturbação.

O modelo é invariante por simetria de paridade, por conjugação de carga e reversão temporal. No entanto, o termo de massa $m\bar{\psi}\psi$ e as interações $(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2$ e $(\bar{\psi}\gamma^5\lambda^a\psi)^2$ quebram a simetria quiral. Para maiores detalhes ver o Apêndice B.

2.2 Estrutura Geral da Série Perturbativa

2.2.1 As Regras de Feynman

Agora iremos mostrar as regras básicas de Feynman da teoria: o propagador do campo fermiônico e as funções de vértices. O propagador do férmion representado na figura (2.1) é dado por,

$$S_F = \left(\frac{i}{\not{p} - m} \right)_{\alpha_1\alpha_2} \delta_{a_1a_2} \delta_{c_1c_2}, \quad (2.2)$$

sendo α o índice de Lorentz e c e a índices de simetria de cor e sabor, respectivamente. Os

¹No sistema de unidades naturais ($c = \hbar = 1$), a dimensão da densidade de lagrangeana em unidade de massa é $[\mathcal{L} = \mathcal{D}]$ sendo D é a dimensão do espaço-tempo. Por outro lado, como $[\psi] = [\bar{\psi}] = (D - 1)/2$, implica que $[G_i] = 2 - D$, sendo $i = 1, 2, 3, 4$.

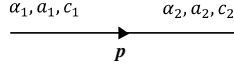


Figura 2.1: Estrutura indicial do propagador.

vértices para o modelo dado por (2.1) são mostrados nas figuras (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5). Sendo que introduzimos as linhas tracejadas, pontilhadas com ponto, pontilhada e tracejada com ponto, para clarificar a estrutura tensorial dos vértices $(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2$, $(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda^a\psi)^2$, $(\bar{\psi}\gamma^5\lambda^a\psi)^2$ e $(\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\lambda^a\psi)^2$, respectivamente. Adotamos também a seguinte notação compacta para os vértices Gross-Neveu, Thirring, Quiral e Axial,

$$\Delta \otimes \Delta = \delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{a_1a_2}\lambda_{c_1c_2}^a \otimes \delta_{\alpha_3\alpha_4}\delta_{a_3a_4}\lambda_{c_3c_4}^a - \text{troca}(\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_4, a_2 \leftrightarrow a_4, c_2 \leftrightarrow c_4),$$

$$\Gamma \otimes \Gamma = \gamma_{\alpha_1\alpha_2}^\mu\delta_{a_1a_2}\lambda_{c_1c_2}^a \otimes \gamma_{\mu\alpha_3\alpha_4}\delta_{a_3a_4}\lambda_{c_3c_4}^a - \text{troca}(\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_4, a_2 \leftrightarrow a_4, c_2 \leftrightarrow c_4),$$

$$\Gamma_5 \otimes \Gamma_5 = \gamma_{\alpha_1\alpha_2}^5\delta_{a_1a_2}\lambda_{c_1c_2}^a \otimes \gamma_{5\alpha_3\alpha_4}\delta_{a_3a_4}\lambda_{c_3c_4}^a - \text{troca}(\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_4, a_2 \leftrightarrow a_4, c_2 \leftrightarrow c_4)$$

e

$$\Gamma_A \otimes \Gamma_A = (\gamma^5\gamma^\mu)_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{a_1a_2}\lambda_{c_1c_2}^a \otimes (\gamma_5\gamma_\mu)_{\alpha_3\alpha_4}\delta_{a_3a_4}\lambda_{c_3c_4}^a - \text{troca}(\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_4, a_2 \leftrightarrow a_4, c_2 \leftrightarrow c_4),$$

sendo que os índices gregos (α) representam os índices de Lorentz e os índices latinos (a, c) representam os índices de simetria interna.

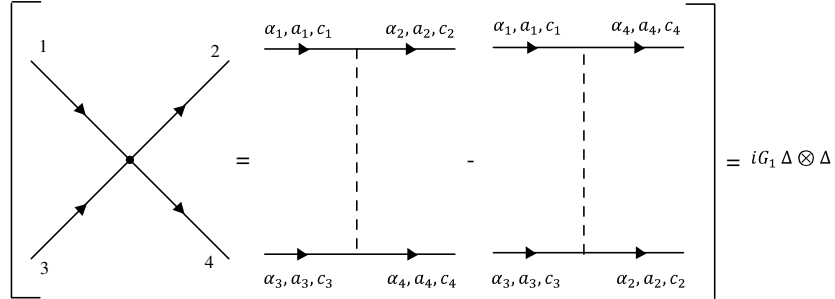


Figura 2.2: Diagrama de árvore para o vértice tipo Gross-Neveu.

2.2.2 A Contagem de Potência dos Diagramas e a Regularização

De acordo com o critério de contagem de potência, o comportamento ultravioleta de um gráfico de Feynman γ é governado pelo grau de divergência superficial [1, 12]. No nosso caso, o grau de divergência superficial é dado por

$$d(\gamma) = 4 - \frac{3}{2}N + 2V, \quad (2.3)$$

sendo N o número de linhas externas do campo fermiônico e V o número de vértices do diagrama.

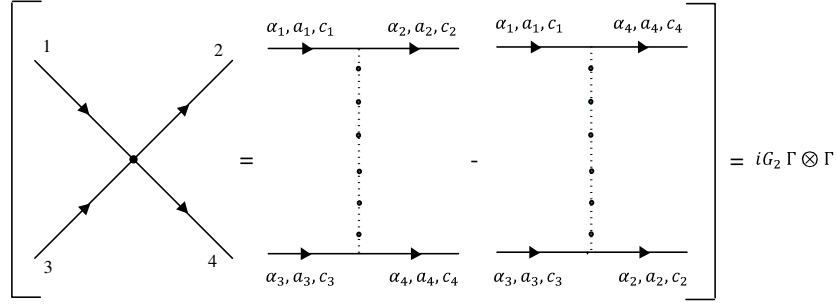


Figura 2.3: Diagrama de árvore para o vértice tipo Thirring.

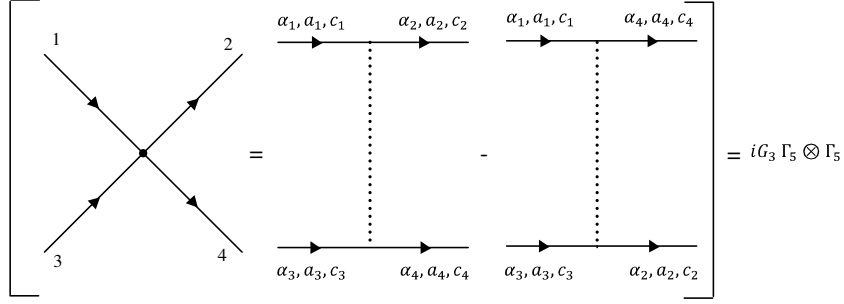


Figura 2.4: Diagrama de árvore para o vértice tipo quiral.

Como estamos tratando com uma teoria não renormalizável temos que a cada ordem de perturbação o grau de divergência superficial vai aumentando, em outras palavras, o comportamento no ultravioleta da teoria vai piorando. Para remover essas divergências devemos adotar algum esquema de renormalização. Isso pode ser feito usando a linguagem de contra-termos, que cancelam as divergências das funções de Green, de modo que sua estrutura está relacionada com o grau de divergência superficial. Realmente, de acordo com o teorema de Weinberg [5, 40], um contra-termo $C(\gamma)$ de um gráfico γ será um polinômio dos momentos externos, de grau igual ao grau de divergência superficial $d(\gamma)$. Isso fica bem claro quando analisamos os gráficos de 1-loop e 2-loops para a função de dois pontos (ver figura (2.6)).

Para o gráfico de 1-loop (ordem G_i) temos que $d(\gamma) = 3$ gerando contra-termos ² proporcionais a m^3 , $m^2 \not{p}$, mp^2 e $\not{p}p^2$. Enquanto que para o gráfico de 2-loops (ordem G_i^2) temos $d(\gamma) = 5$ e os contra-termos gerados são do tipo m^5 , $m^4 \not{p}$, $m^3 p^2$, $m^2 p^2 \not{p}$, mp^4 e $\not{p}p^4$. Note que a cada ordem de perturbação que vamos considerando temos o surgimento de novos contra-termos diferentes daqueles contidos na lagrangeana (2.1), o que implica que para tornarmos a teoria finita em todas as ordens de perturbação, devemos adicionar a mesma um número infinito de contra-termos.

De forma análoga para os gráficos de 1-loop e 2-loops da função de quatro pontos³, ver figura

²Os contra-termos devem ser invariante de Lorentz.

³Por comodidade adotamos uma representação condensada em que p representa quaisquer dos momentos externos.

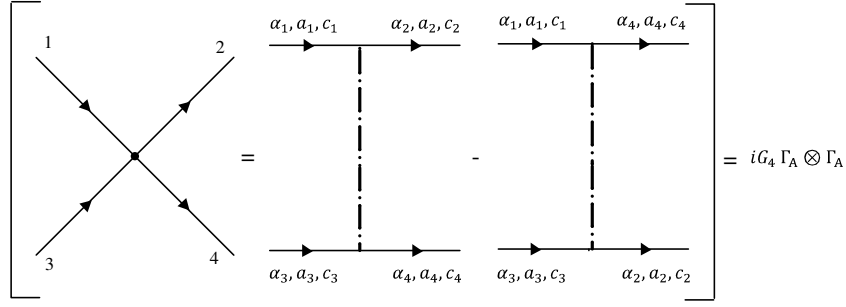


Figura 2.5: Diagrama de árvore para o vértice tipo axial.

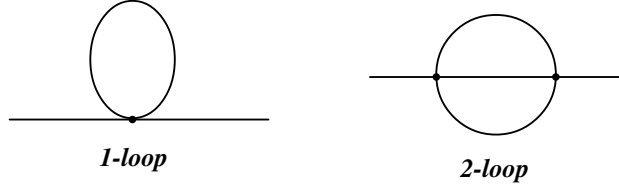


Figura 2.6: Diagrama de 1-loop e 2-loops da função de dois pontos

(2.7), temos que em 1-loop (ordem G_i^2) $d(\gamma) = 2$ e os contra-termos gerados são do tipo m^2 , $m \not{p}$ e p^2 ; já para 2-loops (ordem G_i^3) temos $d(\gamma) = 4$ e os contra-termos com a seguinte estrutura m^4 , $m^3 \not{p}$, $m^2 p^2$, $m p^2 \not{p}$ e p^4 .

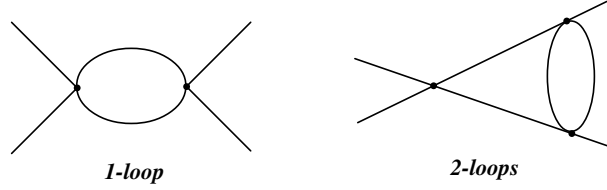


Figura 2.7: Diagrama de 1-loop e 2-loops da função de quatro pontos

Portanto, com relação à função de dois pontos, os termos sem derivadas poderiam ser absorvidos numa reparametrização da massa, os de uma derivada numa reparametrização do campo, e os com duas ou mais derivadas são novos contra-termos diferentes daqueles já contidos em (2.1). Semelhantemente, para a função de quatro pontos, os termos sem derivadas poderiam ser absorvidos numa reparametrização da constante de acoplamento G_i , e os de uma ou mais derivadas são novos contra-termos induzidos, que por sua vez requeririam a introdução de novos tipos de interações da forma $(\bar{\psi} \lambda^a \Gamma^\alpha \not{\partial} \psi)(\bar{\psi} \lambda^a \Gamma_\alpha \psi)$, $(\bar{\psi} \lambda^a \Gamma^\alpha \partial^2 \psi)(\bar{\psi} \lambda^a \Gamma_\alpha \psi)$ e outros termos de mais derivadas, sendo que Γ^α pode ser qualquer uma das matrizes I , γ^μ , γ^5 ou $\gamma^5 \gamma^\mu$.

Ao utilizarmos a teoria de perturbação em teoria quântica de campos, devemos adotar uma prescrição para remover as divergências que advêm dos diagramas de Feynman. Tal prescrição consiste em escolher um esquema de renormalização que regule as integrais e que subtraia os infinitos (as parcelas divergentes) de maneira sistemática. Neste trabalho adotaremos a regulari-

zação dimensional [41]. Em muitas situações este é o método mais conveniente, além de que, de acordo com Manohar [42], no contexto das teorias efetivas, este esquema é quase que obrigatório para garantir que contra-termos de ordem mais elevadas possam ser desprezados, como veremos mais adiante.

A idéia desse esquema se baseia no fato de que as divergências ultravioleta dos diagramas de Feynman, que advém dos loops de integração, são eliminadas quando se vai para uma dimensão D do espaço-tempo pequena o bastante para tornar tal amplitude convergente. As integrais de Feynman são então definidas como funções analíticas do espaço-tempo D -dimensional, e os infinitos aparecem como singularidades na forma $1/\epsilon$, sendo $\epsilon = 4 - D$, quando D tende a 4 [41].

2.3 O Grupo de Renormalização e a Teoria Efetiva

2.3.1 A Equação do Grupo de Renormalização e a Validade da Teoria Efetiva

O Grupo de Renormalização (GR) teve origem na eletrodinâmica quântica com o objetivo de estudar o comportamento assintótico das funções de Green da teoria. Juntamente com a equação de Callan-Symanzik, possibilitaram uma análise detalhada do comportamento assintótico em teoria de campos, acarretando na descoberta do fenômeno da liberdade assintótica em teorias de calibre não abelianas [1]. Em poucas palavras podemos dizer que o GR consiste das transformações que deixam invariante as amplitudes renormalizadas quando mudamos o ponto de subtração μ , sendo que μ representa a escala de momento em que as subtrações dos infinitos da teoria são feitas [1, 12, 39].

Agora vamos obter a equação do grupo de renormalização (EGR) para o modelo de NJJ derivada a partir do esquema de subtração minimal (regularização dimensional), chamada de equação de t' Hooft-Weinberg [40, 43]. Vamos por simplicidade ignorar inicialmente a não renormalizabilidade da teoria e considerarmos uma única constante de acoplamento. Para isso redefinimos a constante de acoplamento $G \rightarrow G\mu^\epsilon$. As funções de vértice férmionicas não renormalizadas de N pontos $\Gamma_n^{(N)}(p_i, G_n, m_n, \epsilon)$, para gráficos $1PI$, e a renormalizada $\Gamma^{(N)}(p_i, G, m, \mu)$ estão relacionadas segundo [1, 12, 37, 38, 39]

$$\Gamma_n^{(N)}(p_i, G_n, m_n, \epsilon) = Z_\psi^{-N/2}(\mu, \epsilon) \Gamma^{(N)}(p_i, G, m, \mu), \quad (2.4)$$

sendo que o subscrito n representa grandezas não renormalizáveis, p_i os N momentos externos e $Z_\psi^{1/2}$ a constante de renormalização para cada linha externa férmionica. Agora, notando que a função de vértice não renormalizada $\Gamma_n^{(N)}$ não depende do ponto de subtração μ , temos que

$$\mu \frac{d\Gamma_n^{(N)}}{d\mu} = 0 = \left(\mu \frac{dZ_\psi^{-N/2}}{d\mu} \right) + Z_n^{-N/2} \left(\mu \frac{d\Gamma^{(N)}}{d\mu} \right). \quad (2.5)$$

Expressando a derivada total em termos das derivadas parciais,

$$\frac{d}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial G}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial G} + \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m},$$

obtemos a equação diferencial de t' Hooft-Weinberg

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + m \delta \frac{\partial}{\partial m} + \beta \frac{\partial}{\partial G} - N \gamma \right) \Gamma^{(N)} = 0, \quad (2.6)$$

com a identificação

$$m \delta(G) = \mu \frac{\partial m}{\partial \mu}, \quad \beta(G) = \mu \frac{\partial G}{\partial \mu} \quad e \quad \gamma(G) = \frac{\mu}{2} \frac{\partial \ln Z_\psi}{\partial \mu},$$

que são as funções do grupo de renormalização, que informam como os parâmetros G e m variam com uma mudança no ponto de renormalização μ . Como nossa teoria é não renormalizável, possui constante de acoplamento com dimensão inversa de massa², é conveniente fazer uma redefinição da constante de acoplamento do tipo, $G \rightarrow \frac{g}{\Lambda^2} \mu^\epsilon$, em que agora g faz o papel de constante de acoplamento adimensional. Com essa mudança podemos notar que $\Gamma^{(N)}$ satisfará a seguinte equação

$$\left(\Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda^2} + g \frac{\partial}{\partial g} \right) \Gamma^{(N)} = 0. \quad (2.7)$$

Somando as equações (2.6) e (2.7), chegamos em

$$\left(\Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda^2} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + m \delta \frac{\partial}{\partial m} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - N \gamma \right) \Gamma^{(N)} = 0, \quad (2.8)$$

sendo que $\beta \rightarrow g + \beta$, notando que estamos apenas fixando a função beta em ordem mais baixa como sendo g . Observando também que agora $\delta = \delta(g, m/\Lambda)$, $\beta = \beta(g, m/\Lambda)$ e $\gamma = \gamma(g, m/\Lambda)$.

De um modo rigoroso a equação (2.8) só é válida no caso de $g = 0$, para $g \neq 0$ a teoria é dita não renormalizável e seu lado direito não é mais verificado. Neste último caso temos que o lado direito de (2.8) é proporcional aos contra-termos que aparecem na sub-seção 2.2.2, notando também que os mesmos são polinômios de p/Λ e m/Λ . Com o aparecimento desses contra-termos que são diferentes daqueles da lagrangeana (2.1) que não poderão ser reabsorvidos numa redefinição da massa, campo ou constante de acoplamento - exceto pelos termos: m^3/Λ^2 , $m^2 p/\Lambda^2$ e m^2/Λ^4 que serão reabsorvidos numa redefinição da massa, campo e constante de acoplamento, respectivamente - teremos que a *EGR* não será mais válida. Para contornar essa dificuldade, vamos tratar a teoria como sendo uma teoria efetiva válida numa escala de energia Λ , tal que $p \ll \Lambda$. Assim temos

$$\left(\Lambda^2 \frac{\partial}{\partial \Lambda^2} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + m \delta \frac{\partial}{\partial m} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - N \gamma \right) \Gamma^{(N)} \approx 0, \quad (2.9)$$

sendo que o símbolo \approx indica igualdade na região em que todos os contra-termos diferentes daqueles contidos em (2.1) podem ser desprezados. A generalização para um modelo com várias constantes de acoplamento é feita pela substituição de

$$\beta \frac{\partial}{\partial g} \rightarrow \sum_{j=1}^4 \beta_j \frac{\partial}{\partial g_j}$$

na equação acima.

2.3.2 As Funções do Grupo de Renormalização

De um modo geral temos que a função de dois e quatro pontos, com a inclusão das correções radiativas, podem ser representadas, respectivamente, da seguinte forma

$$\Gamma^{(2)} = i(\not{p} - m) + \Sigma \quad (2.10)$$

e

$$\Gamma^{(4)} = i\frac{g_1}{\Lambda^2}\mu^\epsilon \Delta \otimes \Delta + i\frac{g_2}{\Lambda^2}\mu^\epsilon \Gamma \otimes \Gamma + i\frac{g_3}{\Lambda^2}\mu^\epsilon \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + i\frac{g_4}{\Lambda^2}\mu^\epsilon \Gamma_A \otimes \Gamma_A + \tilde{\Gamma}, \quad (2.11)$$

sendo que Σ e $\tilde{\Gamma}$ vêm do cálculo dos diagramas de Feynman não trivial, que neste trabalho consideraremos até a ordem de 1-loop. No caso de Σ temos que em 1-loop a mesma é obtida a partir de

$$\Sigma = i\frac{g}{\Lambda^2}(1 - \mathcal{T})\mu^\epsilon I^{(2)},$$

sendo que g representa qualquer um dos quatro acoplamento, \mathcal{T} representa o operador que remove o termo de pólo da amplitude⁴ $I^{(2)}$ [34, 44], μ o ponto de renormalização, e $I^{(2)}$ corresponde a amplitude de Feynman com linhas externas amputadas, obtida por regularização dimensional, que possui a seguinte estrutura

$$I^{(2)} = \text{finita}^{(2)} + \text{pólo}^{(2)},$$

com $\text{pólo}^{(2)} = \text{Res}^{(2)}/\epsilon$. Utilizando a expansão $\mu^\epsilon = 1 + \epsilon \ln \mu$ e a expressão de $I^{(2)}$, encontramos que

$$\Sigma = i\frac{g}{\Lambda^2} \left[\text{finita}^{(2)} + \ln \mu \text{Res}^{(2)} \right],$$

em que $\text{Res}^{(2)}$ é o resíduo da função de dois pontos, dado por

$$\text{Res}^{(2)} = Am^3 + Bm^2 \not{p} + Cmp^2 + D \not{p}p^2$$

em 1-loop. Usando o fato de que estamos trabalhando numa região tal que $p \ll \Lambda \approx m$, podemos desprezar o terceiro e quarto termos do resíduo. Assim a função de dois pontos pode se expressa da seguinte forma

$$\Gamma^{(2)} = i(\not{p} - m) + i \sum_{j=1}^4 \frac{g_j}{\Lambda^2} \left[\text{finita}_j^{(2)} + \ln \mu (A_j m^3 + B_j m^2 \not{p}) \right], \quad (2.12)$$

sendo A_j e B_j constantes numéricas obtidas diretamente dos diagramas de Feynman.

Agora para obtermos $\tilde{\Gamma}$ temos analogamente ao caso anterior que

$$\tilde{\Gamma} = -\frac{g^2}{\Lambda^4}(1 - \mathcal{T})\mu^{2\epsilon} I^{(4)},$$

⁴Esquemáticamente, considere uma amplitude da forma $I^{(N)} = \text{pólo}^{(N)} + \text{finita}^{(N)}$, de modo que a operação $(1 - \mathcal{T})\mu^{x\epsilon} I^{(N)} = (1 - \mathcal{T})e^{x\epsilon \ln \mu} (\text{pólo}^{(N)} + \text{finita}^{(N)}) = (1 - \mathcal{T})(\text{pólo}^{(N)} + \text{finita}^{(N)} + x \ln \mu \text{Res}^{(N)} + \mathcal{O}(\epsilon)) = \text{finita}^{(N)} + x \ln \mu \text{Res}^{(N)}$, sendo $\text{Res}^{(N)}$ representa o resíduo dos diagramas de N pontos, que são dados pelos coeficientes do termo $1/\epsilon$.

sendo $I^{(4)}$ a amplitude de Feynman em 1-loop para a função de quatro pontos com as linhas externas amputadas e g^2 representa as dez combinações entre as quatro constantes de acoplamento ($g_1^2, g_2^2, g_3^2, g_4^2, g_1g_2, g_1g_3, g_1g_4, g_2g_3, g_2g_4$ e g_3g_4). Com $I^{(4)}$ dada por

$$I^{(4)} = \text{finita}^{(4)} + \text{pólo}^{(4)},$$

e $\text{pólo}^{(4)} = \text{Res}^{(4)}/\epsilon$. O resíduo nesse caso é dado por

$$\text{Res}^{(4)} = Em^2 + Fm \not{p} + Gp^2.$$

Novamente utilizando a condição que $p \ll \Lambda$, o segundo e terceiro termos podem ser desprezados. Assim, utilizando a expansão $\mu^{2\epsilon} = 1 + 2\epsilon \ln\mu$ e utilizando a expressão de $I^{(4)}$, chegamos que a função de quatro pontos pode ser escrita como segue

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)} &= i \frac{g_1}{\Lambda^2} \mu^\epsilon \Delta \otimes \Delta + i \frac{g_2}{\Lambda^2} \mu^\epsilon \Gamma \otimes \Gamma + i \frac{g_3}{\Lambda^2} \mu^\epsilon \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + i \frac{g_4}{\Lambda^2} \mu^\epsilon \Gamma_A \otimes \Gamma_A + \\ &- \frac{g^2}{\Lambda^4} \mu^{2\epsilon} \left[\text{finita}^{(4)} + 2 \ln\mu (Em^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sabendo que o coeficiente E na verdade é proporcional a $\Delta \otimes \Delta, \Gamma \otimes \Gamma, \Gamma_5 \otimes \Gamma_5$ e $\Gamma_A \otimes \Gamma_A^5$, temos que a função de quatro pontos é escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)} &= i \frac{g_1}{\Lambda^2} \mu^\epsilon \Delta \otimes \Delta + i \frac{g_2}{\Lambda^2} \mu^\epsilon \Gamma \otimes \Gamma + i \frac{g_3}{\Lambda^2} \mu^\epsilon \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + i \frac{g_4}{\Lambda^2} \mu^\epsilon \Gamma_A \otimes \Gamma_A + \\ &- \frac{g_1^2}{\Lambda^4} \mu^{2\epsilon} \left[\text{finita}_1^{(4)} + 2m^2 \ln\mu (D_1 \Delta \otimes \Delta + D_2 \Gamma \otimes \Gamma + D_3 \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + D_4 \Gamma_A \otimes \Gamma_A) \right] \\ &- \frac{g_2^2}{\Lambda^4} \mu^{2\epsilon} \left[\text{finita}_2^{(4)} + 2m^2 \ln\mu (D_5 \Delta \otimes \Delta + D_6 \Gamma \otimes \Gamma + D_7 \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + D_8 \Gamma_A \otimes \Gamma_A) \right] \\ &- \frac{g_3^2}{\Lambda^4} \mu^{2\epsilon} \left[\text{finita}_3^{(4)} + 2m^2 \ln\mu (D_9 \Delta \otimes \Delta + D_{10} \Gamma \otimes \Gamma + D_{11} \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + D_{12} \Gamma_A \otimes \Gamma_A) \right] \\ &- \frac{g_4^2}{\Lambda^4} \mu^{2\epsilon} \left[\text{finita}_4^{(4)} + 2m^2 \ln\mu (D_{13} \Delta \otimes \Delta + D_{14} \Gamma \otimes \Gamma + D_{15} \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + D_{16} \Gamma_A \otimes \Gamma_A) \right] \\ &- \frac{g_1g_2}{\Lambda^4} \mu^{2\epsilon} \left[\text{finita}_5^{(4)} + 2m^2 \ln\mu (D_{17} \Delta \otimes \Delta + D_{18} \Gamma \otimes \Gamma + D_{19} \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + D_{20} \Gamma_A \otimes \Gamma_A) \right] \\ &- \frac{g_1g_3}{\Lambda^4} \mu^{2\epsilon} \left[\text{finita}_6^{(4)} + 2m^2 \ln\mu (D_{21} \Delta \otimes \Delta + D_{22} \Gamma \otimes \Gamma + D_{23} \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + D_{24} \Gamma_A \otimes \Gamma_A) \right] \\ &- \frac{g_1g_4}{\Lambda^4} \mu^{2\epsilon} \left[\text{finita}_7^{(4)} + 2m^2 \ln\mu (D_{25} \Delta \otimes \Delta + D_{26} \Gamma \otimes \Gamma + D_{27} \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + D_{28} \Gamma_A \otimes \Gamma_A) \right] \\ &- \frac{g_2g_3}{\Lambda^4} \mu^{2\epsilon} \left[\text{finita}_8^{(4)} + 2m^2 \ln\mu (D_{29} \Delta \otimes \Delta + D_{30} \Gamma \otimes \Gamma + D_{31} \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + D_{32} \Gamma_A \otimes \Gamma_A) \right] \\ &- \frac{g_2g_4}{\Lambda^4} \mu^{2\epsilon} \left[\text{finita}_9^{(4)} + 2m^2 \ln\mu (D_{33} \Delta \otimes \Delta + D_{34} \Gamma \otimes \Gamma + D_{35} \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + D_{36} \Gamma_A \otimes \Gamma_A) \right] \\ &- \frac{g_3g_4}{\Lambda^4} \mu^{2\epsilon} \left[\text{finita}_{10}^{(4)} + 2m^2 \ln\mu (D_{37} \Delta \otimes \Delta + D_{38} \Gamma \otimes \Gamma + D_{39} \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + D_{40} \Gamma_A \otimes \Gamma_A) \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Uma vez determinadas as funções de dois e quatro pontos estamos aptos a calcular as funções do GR , para tanto vamos admitir que possamos fazer as seguintes decomposições

$$\delta = \sum_{ijkl} \delta_{ijkl} g_1^i g_2^j g_3^k g_4^l,$$

⁵Como estamos tratando com férmions é esperado que por correções radiativas (e pelas identidades de Fierz) um vértice tipo Gross-Neveu, por exemplo, possa gerar vértices do tipo Thirring, Quiral ou Axial. Isso será discutido melhor no próximo capítulo.

$$\gamma = \sum_{ijkl} \gamma_{ijkl} g_1^i g_2^j g_3^k g_4^l$$

e

$$\beta_{(\alpha)} = \sum_{ijkl} \beta_{(\alpha)ijkl} g_1^i g_2^j g_3^k g_4^l,$$

sendo $\alpha = 1, 2, 3, 4$ e a soma é restrita a $i + j + k + l \leq 2$. Aplicando $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(4)}$, (2.12) e (2.14), na equação (2.9), e colecionando os resultados ordem a ordem, e agrupando os termos proporcionais a $\Delta \otimes \Delta$, $\Gamma \otimes \Gamma$, $\Gamma_5 \otimes \Gamma_5$ e $\Gamma_A \otimes \Gamma_A$ teremos:

$$\delta = \frac{m^2}{\Lambda^2} [(A_1 + B_1)g_1 + (A_2 + B_2)g_2 + (A_3 + B_3)g_3 + (A_4 + B_4)g_4], \quad (2.15)$$

$$\gamma = \frac{m^2}{2\Lambda^2} [B_1 g_1 + B_2 g_2 + B_3 g_3 + B_4 g_4], \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 = g_1 + \frac{2m^2}{\Lambda^2} [(B_1 - iD_1)g_1^2 - iD_5 g_2^2 - iD_9 g_3^2 - iD_{13} g_4^2 + (B_2 - iD_{17})g_1 g_2 + \\ + (B_3 - D_{21})g_1 g_3 + (B_4 - iD_{25})g_1 g_4 - iD_{29} g_2 g_3 - iD_{33} g_2 g_4 - iD_{37} g_3 g_4], \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = g_2 + \frac{2m^2}{\Lambda^2} [-iD_2 g_1^2 + (B_2 - iD_6)g_2^2 - iD_{10} g_3^2 - iD_{14} g_4^2 + (B_1 - iD_{18})g_1 g_2 + \\ - iD_{22} g_1 g_3 - iD_{26} g_1 g_4 + (B_3 - iD_{30})g_2 g_3 + (B_4 - iD_{34})g_2 g_4 - iD_{38} g_3 g_4], \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = g_3 + \frac{2m^2}{\Lambda^2} [-iD_3 g_1^2 - iD_7 g_2^2 + (B_3 - iD_{11})g_3^2 - iD_{15} g_4^2 - iD_{19} g_1 g_2 + (B_1 + \\ - D_{23})g_1 g_3 - iD_{27} g_1 g_4 + (B_2 - iD_{31})g_2 g_3 - iD_{35} g_2 g_4 + (B_4 - iD_{39})g_3 g_4], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \beta_4 = g_4 + \frac{2m^2}{\Lambda^2} [-iD_4 g_1^2 - iD_8 g_2^2 - iD_{12} g_3^2 + (B_4 - iD_{16})g_4^2 - iD_{20} g_1 g_2 - iD_{24} g_1 g_3 + \\ + (B_1 - iD_{28})g_1 g_4 - iD_{32} g_2 g_3 + (B_2 - iD_{36})g_2 g_4 + (B_3 - iD_{40})g_3 g_4], \end{aligned} \quad (2.20)$$

que são as funções delta, gama e betas da teoria. E os coeficientes A 's, B 's e D 's são calculados diretamente dos diagramas de Feynman, como veremos no capítulo seguinte.

Capítulo 3

Funções de Green

3.1 De Dois Pontos

Nesta seção vamos nos deter em calcular os diagramas de dois pontos representadas pelas figuras (C.1), (C.2), (C.3) e (C.4) que estão mostradas no Apêndice C. Podemos notar que existem dois diagramas a serem calculados para cada uma das figuras, o primeiro (a) em que existe um traço associado ao loop de férmions que representaremos por I_L e o segundo (b) sem loop de férmions que representaremos por I_{SL} . Assim, temos para os diagramas do caso (a) e (b), respectivamente, as seguintes expressões ¹

$$I_L^{(j)} = -iF_c \frac{g_j}{\Lambda^2} \mu^\epsilon (\lambda_a)_{c_1 c_2} N_f \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (\Pi^j)_{\alpha_1 \alpha_2} Tr \left(\Pi_j \frac{i}{\not{k} - m} \right) Tr(\lambda_a) \delta_{a_1 a_2} \quad (3.1)$$

e

$$I_{SL}^{(j)} = iF_c \frac{g_j}{\Lambda^2} \mu^\epsilon (\lambda_a \lambda_a)_{c_1 c_2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\Pi^j \frac{i}{\not{k} - m} \Pi_j \right)_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{a_1 a_2}. \quad (3.2)$$

Sendo que g_j representa as quatro constantes de acoplamento para $j = 1, 2, 3, 4$ e Π^j representa I, γ^μ, γ^5 e $\gamma^5 \gamma^\mu$ para $j = 1, 2, 3, 4$ respectivamente, F_c é o fator combinatorial que vale 4. A primeira integral, I_L , é nula pela propriedade de traço $Tr(\lambda_a) = 0$, deste modo ficamos somente com a integral I_{SL} para ser resolvida.

Pela relação [19, 20]

$$\lambda_{c_1 c_2}^a \lambda_{c_3 c_4}^a = 2 \left(\delta_{c_1 c_4} \delta_{c_2 c_3} - \frac{1}{N_c} \delta_{c_1 c_2} \delta_{c_3 c_4} \right),$$

temos que $(\lambda_a \lambda_a)_{c_1 c_2} = 2\delta_{c_1 c_2} (N_c^2 - 1)/N_c$, logo a integral (3.2) fica

$$I_{SL}^{(j)} = 2iF_c \frac{g_j}{\Lambda^2} \mu^\epsilon \frac{(N_c^2 - 1)}{N_c} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Pi^j \frac{i}{\not{k} - m} \Pi_j. \quad (3.3)$$

Agora teremos que resolver a integral J_j dada por

$$J_j = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \Pi^j \frac{i}{\not{k} - m} \Pi_j, \quad (3.4)$$

¹As amplitudes I tem a seguinte estrutura tensorial $I = I_{\alpha_1 \alpha_2 a_1 a_2 c_1 c_2}$, mas para efeitos de cálculo serão omitidas.

para cada caso. Assim temos

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} I \frac{i}{\not{k} - m} I = im \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}, \\
J_2 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma_\mu = 4im \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}, \\
J_3 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^5 \frac{i}{\not{k} - m} \gamma_5 = im \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}, \\
J_4 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^5 \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^5 \gamma_\mu = -4im \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2}.
\end{aligned}$$

Usando a tabela de regularização dimensional (ver Apêndice A) e considerando apenas a parcela divergente, temos que

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} = \frac{im^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon},$$

e substituindo esse valor nas integrais acima, encontramos que as parcelas divergentes das integrais J 's são

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\frac{m^3}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \\
J_2 &= -\frac{4m^3}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \\
J_3 &= -\frac{m^3}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon} \\
J_4 &= \frac{4m^3}{(4\pi)^2} \frac{2}{\epsilon}.
\end{aligned}$$

Voltando para a integral (3.3), a contribuição advinda da parcela divergente para cada termo de interação é dada por

$$\begin{aligned}
I_{SL}^{(1)} &= -m^3 F_c \frac{i g_1}{\Lambda^2} \frac{4(N_c^2 - 1)}{N_c(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \\
I_{SL}^{(2)} &= -m^3 F_c \frac{i g_2}{\Lambda^2} \frac{16(N_c^2 - 1)}{N_c(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \\
I_{SL}^{(3)} &= -m^3 F_c \frac{i g_3}{\Lambda^2} \frac{4(N_c^2 - 1)}{N_c(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \\
I_{SL}^{(4)} &= m^3 F_c \frac{i g_4}{\Lambda^2} \frac{16(N_c^2 - 1)}{N_c(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Agora, lembrando que o resíduo da função de dois pontos é dado por $A_j m^3 + B_j m^2$ ² percebemos que os coeficientes B_j são todos nulos uma vez que em (3.5) não temos nenhum termo proporcional a m^2 ². Os coeficientes A_j são proporcionais a m^3 e dados por

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{16(N_c^2 - 1)}{N_c(4\pi)^2} \\
A_2 &= -\frac{64(N_c^2 - 1)}{N_c(4\pi)^2}
\end{aligned}$$

²Ou seja, não entra momento externo no loop de integração na ordem considerada.

$$A_3 = -\frac{16(N_c^2 - 1)}{N_c(4\pi)^2}$$

$$A_4 = \frac{64(N_c^2 - 1)}{N_c(4\pi)^2},$$

sendo que explicitamos $F_c = 4$.

3.2 De Quatro Pontos

3.2.1 Determinação dos Termos de Pólo

Para a determinação dos termos de pólo que são importantes para o cálculo dos coeficientes D' s da função de Green de quatro pontos, vamos começar observando a figura (3.1) que mostra um diagrama geral de quatro pontos. A partir das identidades de Fierz [24, 36] podemos perceber que a parcela divergente em 1-loop do mesmo tem uma estrutura tensorial do tipo

$$\mathcal{T} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (A \otimes B) C = \text{pólo}_1 \Delta \otimes \Delta + \text{pólo}_2 \Gamma \otimes \Gamma + \text{pólo}_3 \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 + \text{pólo}_4 \Gamma_A \otimes \Gamma_A, \quad (3.6)$$

sendo A e B referentes aos propagadores e vértices (escalar, vetorial, quiral e axial) associados às duas linhas fermiônicas de férmions e C representa os outros fatores. O símbolo \otimes significa produto direto anti-simetrizado, isto é,

$$A \otimes B = A_{\alpha_1 \alpha_2} B_{\alpha_3 \alpha_4} \delta_{a_1 a_2} \delta_{a_3 a_4} \lambda_{c_1 c_2}^a \lambda_{c_3 c_4}^a - A_{\alpha_1 \alpha_4} B_{\alpha_3 \alpha_2} \delta_{a_1 a_4} \delta_{a_3 a_2} \lambda_{c_1 c_4}^a \lambda_{c_3 c_2}^a,$$

e os demais foram vistos no capítulo anterior.

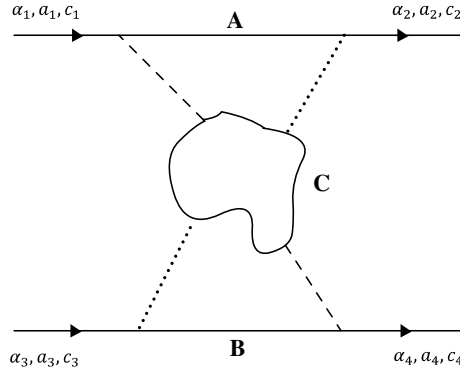


Figura 3.1: Estrutura tensorial geral para a função de quatro pontos

Para obtermos as expressões de pólo $_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) em (3.6) precisamos fazer os produtos $(A \otimes B) \Delta \otimes \Delta$, $(A \otimes B) \Gamma \otimes \Gamma$, $(A \otimes B) \Gamma_5 \otimes \Gamma_5$, $(A \otimes B) \Gamma_A \otimes \Gamma_A$ e também outros dez produtos envolvendo $\Delta \otimes \Delta$, $\Gamma \otimes \Gamma$, $\Gamma_5 \otimes \Gamma_5$ e $\Gamma_A \otimes \Gamma_A$. Esses produtos são facilmente encontrados com ajuda da relação de completude para os geradores do grupo de cor

$$\lambda_{c_1 c_2}^a \lambda_{c_3 c_4}^a = 2 \left(\delta_{c_1 c_4} \delta_{c_2 c_3} - \frac{1}{N_c} \delta_{c_1 c_2} \delta_{c_3 c_4} \right)$$

e as propriedades de traço das matrizes de Dirac em quatro dimensões

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu},$$

$$Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) = Tr(\gamma^\mu \gamma^5) = Tr(\gamma^\mu) = Tr(\gamma^5) = 0,$$

$$Tr(I) = 4.$$

Assim os resultados são

$$\begin{aligned} (A \otimes B) \Delta \otimes \Delta &= 8N_f (N_c^2 - 1) \left[N_f Tr(A) Tr(B) + \frac{1}{N_c} Tr(AB) \right] \\ (A \otimes B) \Gamma \otimes \Gamma &= 8N_f (N_c^2 - 1) \left[N_f Tr(A\gamma^\mu) Tr(B\gamma_\mu) + \frac{1}{N_c} Tr(A\gamma^\mu B\gamma_\mu) \right] \\ (A \otimes B) \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 &= 8N_f (N_c^2 - 1) \left[N_f Tr(A\gamma^5) Tr(B\gamma_5) + \frac{1}{N_c} Tr(A\gamma^5 B\gamma_5) \right] \\ (A \otimes B) \Gamma_A \otimes \Gamma_A &= 8N_f (N_c^2 - 1) \left[N_f Tr(A\gamma^5 \gamma^\mu) Tr(B\gamma_5 \gamma_\mu) + \frac{1}{N_c} Tr(A\gamma^5 \gamma^\mu B\gamma_5 \gamma_\mu) \right] \\ \Delta \otimes \Delta \Delta \otimes \Delta &= 32N_f (N_c^2 - 1) (4N_f + \frac{1}{N_c}) \\ \Delta \otimes \Delta \Gamma \otimes \Gamma &= 128 \frac{N_f}{N_c} (N_c^2 - 1) \\ \Delta \otimes \Delta \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 &= 32 \frac{N_f}{N_c} (N_c^2 - 1) \\ \Delta \otimes \Delta \Gamma_A \otimes \Gamma_A &= -128 \frac{N_f}{N_c} (N_c^2 - 1) \\ \Gamma \otimes \Gamma \Gamma \otimes \Gamma &= 256 N_f (N_c^2 - 1) (2N_f - \frac{1}{N_c}) \\ \Gamma \otimes \Gamma \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 &= -128 \frac{N_f}{N_c} (N_c^2 - 1) \\ \Gamma \otimes \Gamma \Gamma_A \otimes \Gamma_A &= -256 \frac{N_f}{N_c} (N_c^2 - 1) \\ \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 &= 32 N_f (N_c^2 - 1) (4N_f + \frac{1}{N_c}) \\ \Gamma_5 \otimes \Gamma_5 \Gamma_A \otimes \Gamma_A &= 128 \frac{N_f}{N_c} (N_c^2 - 1) \\ \Gamma_A \otimes \Gamma_A \Gamma_A \otimes \Gamma_A &= 256 N_f (N_c^2 - 1) (2N_f - \frac{1}{N_c}). \end{aligned}$$

Agora, multiplicando (3.6) em ambos os lados por $\Delta \otimes \Delta$, $\Gamma \otimes \Gamma$, $\Gamma_5 \otimes \Gamma_5$ e $\Gamma_A \otimes \Gamma_A$, obtemos:

$$\begin{aligned} I_1 &= 4(4N_f + \frac{1}{N_c})\text{pólo}_1 + \frac{16}{N_c}\text{pólo}_2 + \frac{4}{N_c}\text{pólo}_3 - \frac{16}{N_c}\text{pólo}_4 \\ I_2 &= \frac{16}{N_c}\text{pólo}_1 + (64N_f - \frac{32}{N_c})\text{pólo}_2 - \frac{16}{N_c}\text{pólo}_3 - \frac{32}{N_c}\text{pólo}_4 \\ I_3 &= \frac{4}{N_c}\text{pólo}_1 - \frac{16}{N_c}\text{pólo}_2 + (16N_f + \frac{4}{N_c})\text{pólo}_3 + \frac{16}{N_c}\text{pólo}_4 \\ I_4 &= -\frac{16}{N_c}\text{pólo}_1 - \frac{32}{N_c}\text{pólo}_2 + \frac{16}{N_c}\text{pólo}_3 + (64N_f - \frac{32}{N_c})\text{pólo}_4, \end{aligned} \tag{3.7}$$

com,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \mathcal{T} F_c \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[N_f \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) + \frac{1}{N_c} \text{Tr}(AB) \right] C \\
I_2 &= \mathcal{T} F_c \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[N_f \text{Tr}(A \gamma^\mu) \text{Tr}(B \gamma_\mu) + \frac{1}{N_c} \text{Tr}(A \gamma^\mu B \gamma_\mu) \right] C \\
I_3 &= \mathcal{T} F_c \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[N_f \text{Tr}(A \gamma^5) \text{Tr}(B \gamma_5) + \frac{1}{N_c} \text{Tr}(A \gamma^5 B \gamma_5) \right] C \\
I_4 &= \mathcal{T} F_c \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[N_f \text{Tr}(A \gamma^5 \gamma^\mu) \text{Tr}(B \gamma_5 \gamma_\mu) + \frac{1}{N_c} \text{Tr}(A \gamma^5 \gamma^\mu B \gamma_5 \gamma_\mu) \right] C \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema de equações (3.7) encontra-se que

$$\text{pólo}_1 = -N_c \left[\frac{2(2 - N_c N_f - 4N_c^2 N_f^2) I_1 + (1 + 2N_c N_f) I_2 + 2(2 + N_c N_f) I_3 - (1 + 2N_c N_f) I_4}{64(-1 + N_c N_f)(1 + 3N_c N_f + 2N_c^2 + N_f^2)} \right] \quad (3.9)$$

$$\text{pólo}_2 = N_c \left[\frac{-2I_1 + (1 + 2N_c N_f) I_2 + 2I_3 + I_4}{128(-1 + N_c^2 N_f^2)} \right] \quad (3.10)$$

$$\text{pólo}_3 = -N_c \left[\frac{-2(2 + N_c N_f) I_1 + (1 + 2N_c N_f) I_2 + 2(-2 + N_c N_f + 4N_c^2 N_f^2) I_3 - (1 + 2N_c N_f) I_4}{64(-1 - 2N_c N_f + N_c^2 N_f^2 + 2N_c^3 N_f^3)} \right] \quad (3.11)$$

$$\text{pólo}_4 = N_c \left[\frac{2I_1 + I_2 - 2I_3 + (1 + 2N_c N_f) I_4}{128(-1 + N_c^2 N_f^2)} \right], \quad (3.12)$$

que são os termos proporcionais a $\Delta \otimes \Delta$, $\Gamma \otimes \Gamma$, $\Gamma_5 \otimes \Gamma_5$ e $\Gamma_A \otimes \Gamma_A$, respectivamente. Agora para calcularmos os pólo_{*i*} (*i* = 1, 2, 3, 4) temos que obter primeiramente as integrais *I_i* (*i* = 1, 2, 3, 4) que vêm diretamente do cálculo dos diagramas de Feynman da correção de vértice. Uma vez determinado os pólo_{*i*}, estaremos aptos a calcular os coeficientes *D*'s da função de quatro pontos que são dados pela soma dos termos proporcionais a $\Delta \otimes \Delta$ (pólo₁), $\Gamma \otimes \Gamma$ (pólo₂), $\Gamma_5 \otimes \Gamma_5$ (pólo₃) e $\Gamma_A \otimes \Gamma_A$ (pólo₄), para cada diagrama em uma dada ordem de perturbação.

3.2.2 Cálculo dos diagramas

Agora vamos nos concentrar em calcular os diagramas da função de quatro pontos que contabilizam um total de 80 diagramas. Para clarificar bem o método utilizado para o cálculo dos diagramas, vamos determinar todos os 10 diagramas da ordem $g_3 g_4$ que correspondem a figura (C.14) e em seguida mostrar como são determinados os coeficientes *D*'s.

A partir da determinação de *A*, *B* e *C* de acordo com a figura (3.1) estaremos aptos a calcular cada uma das integrais (3.8) com $F_c = 16$ sendo o fator combinatorial. Os pólos como vimos são determinados por (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12).

Para o cálculo dos diagramas usaremos as propriedades de traço das matrizes de Dirac do Apêndice A, bem como as integrais resolvidas por regularização dimensional

$$\mathcal{T} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} = \frac{i}{8\pi^2} \quad e \quad \mathcal{T} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - m^2)^2} = \frac{im^2}{4\pi^2},$$

notando que estamos tomando somente o termo de pólo. Consideraremos também os momentos externos nulos para o cálculo das integrais, nos valendo da condição $p \ll \Lambda$.

Diagrama C.14 a

Para este diagrama temos que A , B e C são dados por

$$A = \gamma^5, \quad B = \gamma^5 \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^5 \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^5 \gamma_\mu \quad e \quad C = I.$$

Assim as integrais são

$$\begin{aligned} I_1 &= F_c \frac{2im^2}{N_c \pi^2} \\ I_2 &= -F_c \frac{8im^2}{N_c \pi^2} \\ I_3 &= F_c \frac{2im^2(1 + 4N_c N_f)}{N_c \pi^2} \\ I_4 &= F_c \frac{8im^2}{N_c \pi^2}, \end{aligned}$$

e os pólos

$$\begin{aligned} \text{pólo}_1 &= 0 \\ \text{pólo}_2 &= 0 \\ \text{pólo}_3 &= F_c \frac{im^2}{2\pi^2} \\ \text{pólo}_4 &= 0. \end{aligned}$$

Diagrama C.14 b

Para este diagrama temos que A , B e C são dados por

$$A = \gamma^5 \gamma_\mu, \quad B = \gamma^5 \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^5 \gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^5 \quad e \quad C = I,$$

assim as integrais são

$$\begin{aligned} I_1 &= -F_c \frac{4im^2}{N_c \pi^2} \\ I_2 &= -F_c \frac{8im^2}{N_c \pi^2} \\ I_3 &= F_c \frac{4im^2}{N_c \pi^2} \\ I_4 &= F_c \frac{8im^2(-1 + 2N_c N_f)}{N_c \pi^2}, \end{aligned}$$

e os pólos

$$\text{pólo}_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{pólo}_2 &= 0 \\ \text{pólo}_3 &= 0 \\ \text{pólo}_4 &= F_c \frac{im^2}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

Diagrama C.14 c

Para este diagrama temos que os mesmos valores de pólo₁, pólo₂, pólo₃ e pólo₄ que o diagrama C.14 a.

Diagrama C.14 d

Para este diagrama temos que os mesmos valores de pólo₁, pólo₂, pólo₃ e pólo₄ que o diagrama C.14 b.

Diagrama C.14 e

Para este diagrama temos que A , B e C são dados por

$$A = \gamma^5 \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^5 \gamma^\mu, \quad B = \gamma_5 \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma_5 \quad e \quad C = I.$$

Assim as integrais são

$$\begin{aligned} I_1 &= F_c \frac{2im^2(3 + 2N_c N_f)}{N_c \pi^2} \\ I_2 &= F_c \frac{8im^2 N_f}{\pi^2} \\ I_3 &= F_c \frac{2im^2}{N_c \pi^2} \\ I_4 &= -F_c \frac{8im^2}{N_c \pi^2}, \end{aligned}$$

e os pólos

$$\begin{aligned} \text{pólo}_1 &= F_c \frac{im^2(1 + N_c N_f)(5 + 4N_c N_f)}{8\pi^2(1 + 2N_c^2 + 3N_c N_f + N_f^2)} \\ \text{pólo}_2 &= F_c \frac{im^2}{8\pi^2} \\ \text{pólo}_3 &= F_c \frac{3im^2}{8\pi^2(1 + 2N_c N_f)} \\ \text{pólo}_4 &= 0. \end{aligned}$$

Diagrama C.14 f

Para este diagrama temos que os mesmos valores de pólo₁, pólo₂, pólo₃ e pólo₄ que o diagrama C.14 e.

Diagrama C.14 g

Para este diagrama temos que A , B e C são dados por

$$A = \gamma^5 \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^5 \gamma^\mu, \quad B = \gamma^5 \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^5 \gamma_\mu \quad e \quad C = I.$$

Assim as integrais são

$$\begin{aligned} I_1 &= F_c \frac{4im^2(-1 + N_c N_f)}{N_c \pi^2} \\ I_2 &= -F_c \frac{8im^2(-1 + N_c N_f)}{N_c \pi^2} \\ I_3 &= 0 \\ I_4 &= 0, \end{aligned}$$

e os pólos

$$\begin{aligned} \text{pólo}_1 &= F_c \frac{im^2(1 + N_c N_f)(-1 + 4N_c N_f)}{8\pi^2(1 + 2N_c^2 + 3N_c N_f + N_f^2)} \\ \text{pólo}_2 &= -F_c \frac{im^2}{8\pi^2} \\ \text{pólo}_3 &= -F_c \frac{3im^2}{8\pi^2(1 + 2N_c N_f)} \\ \text{pólo}_4 &= 0. \end{aligned}$$

Diagrama C.14 h

Para este diagrama temos que os mesmos valores de pólo_1 , pólo_2 , pólo_3 e pólo_4 que o diagrama C.14 g.

Diagrama C.14 i

Para este diagrama temos que A , B e C são dados por

$$A = \gamma^5, \quad B = \gamma^5 \gamma^\mu \quad e \quad C = -Tr \left(\gamma^5 \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^5 \gamma_\mu \frac{i}{\not{k} - m} \right) = 0,$$

logo as integrais são todas nulas e conseqüentemente os pólos.

Diagrama C.14 j

Para este diagrama temos que os mesmos valores de P_1 , P_2 , P_3 e P_4 que o diagrama C.14 i.

Coeficientes D' s

Coeficiente	Definição	Valor
D_1	Soma dos pólos ₁ para cada diagrama na ordem g_1^2	$\frac{4i(4-48N_f-9N_f^2+837N_f^3)}{\pi^2(3N_f-1)(19+9N_f+N_f^2)}$
D_2	Soma dos pólos ₂ para cada diagrama na ordem g_1^2	$\frac{54i(N_f-1)}{\pi^2(9N_f^2-1)}$
D_3	Soma dos pólos ₃ para cada diagrama na ordem g_1^2	$\frac{108iN_f(N_f-1)(2+3N_f)}{\pi^2(-1-6N_f+9N_f^2+54N_f^3)}$
D_4	Soma dos pólos ₄ para cada diagrama na ordem g_1^2	$-\frac{54i(N_f)(N_f-1)}{\pi^2(9N_f^2-1)}$

Tabela 3.1: Resumo dos coeficientes D' s da ordem g_1^2 .

Agora para determinarmos os coeficientes D' s nessa ordem (D_{37} , D_{38} , D_{39} e D_{40}) basta fazermos:

$$D_{37} = \text{Soma dos pólos}_1 \text{ para cada diagrama na ordem } g_3g_4 = \frac{16i(1 + 3N_cN_f + 2N_c^2N_f^2)}{\pi^2(1 + 2N_c^2 + 3N_cN_f + N_f^2)}$$

$$D_{38} = \text{Soma dos pólos}_2 \text{ para cada diagrama na ordem } g_3g_4 = 0$$

$$D_{39} = \text{Soma dos pólos}_3 \text{ para cada diagrama na ordem } g_3g_4 = \frac{16i}{\pi^2}$$

$$D_{40} = \text{Soma dos pólos}_4 \text{ para cada diagrama na ordem } g_3g_4 = \frac{8i}{\pi^2},$$

sendo que foi tomado o fator combinatorial $F_c = 16$.

Os cálculos dos outros coeficientes D' s são feitos de maneira análoga a esses, e devido a grande quantidade de diagramas mostraremos apenas um resumo que se encontra nas tabelas (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10) em que foi tomado $N_c = 3$.

Com esses resultados estamos aptos a encontrar as funções do grupo de renormalização do modelo. Observe entretanto, que até a ordem considerada (1-loop) a dimensão anômala é identicamente nula (pois os coeficientes B' s são nulos). No próximo capítulo analizaremos os pontos fixos da teoria.

Coeficiente	Definição	Valor
D_5	Soma dos pólos ₁ para cada diagrama na ordem g_2^2	$-\frac{16i(1+9N_f+18N_f^2)}{\pi^2(19+9N_f+18N_f^2)}$
D_6	Soma dos pólos ₂ para cada diagrama na ordem g_2^2	0
D_7	Soma dos pólos ₃ para cada diagrama na ordem g_2^2	0
D_8	Soma dos pólos ₄ para cada diagrama na ordem g_2^2	$\frac{12i}{\pi^2}$

Tabela 3.2: Resumo dos coeficientes D' s da ordem g_2^2 .

Coeficiente	Definição	Valor
D_9	Soma dos pólos ₁ para cada diagrama na ordem g_3^2	$-\frac{4i(1+9N_f+18N_f^2)}{\pi^2(19+9N_f+N_f^2)}$
D_{10}	Soma dos pólos ₂ para cada diagrama na ordem g_3^2	0
D_{11}	Soma dos pólos ₃ para cada diagrama na ordem g_3^2	$\frac{4i(1-6N_f)}{\pi^2}$
D_{12}	Soma dos pólos ₄ para cada diagrama na ordem g_3^2	0

Tabela 3.3: Resumo dos coeficientes D' s da ordem g_3^2 .

Coeficiente	Definição	Valor
D_{13}	Soma dos pólos ₁ para cada diagrama na ordem g_4^2	$-\frac{4i(-12-27N_f+90N_f^2+216N_f^3)}{\pi^2(3N_f-1)(19+9N_f+N_f^2)}$
D_{14}	Soma dos pólos ₂ para cada diagrama na ordem g_4^2	$-\frac{2i(4+9N_f)}{\pi^2(9N_f^2-1)}$
D_{15}	Soma dos pólos ₃ para cada diagrama na ordem g_4^2	$-\frac{4i(-8+3N_f+90N_f^2)}{\pi^2(9N_f^2-1)(6N_f+1)}$
D_{16}	Soma dos pólos ₄ para cada diagrama na ordem g_4^2	$-\frac{2i(-6-15N_f+72N_f^2+216N_f^3)}{\pi^2(9N_f^2-1)}$

Tabela 3.4: Resumo dos coeficientes D' s da ordem g_4^2 .

Coeficiente	Definição	Valor
D_{17}	Soma dos pólos ₁ para cada diagrama na ordem g_1g_2	$-\frac{24i(1+3N_f)(3+12N_f)}{\pi^2(19+9N_f+N_f^2)}$
D_{18}	Soma dos pólos ₂ para cada diagrama na ordem g_1g_2	$-\frac{8i}{\pi^2}$
D_{19}	Soma dos pólos ₃ para cada diagrama na ordem g_1g_2	$-\frac{24i}{(1+N_f)\pi^2}$
D_{20}	Soma dos pólos ₄ para cada diagrama na ordem g_1g_2	0

Tabela 3.5: Resumo dos coeficientes D' s da ordem g_1g_2 .

Coeficiente	Definição	Valor
D_{21}	Soma dos pólos ₁ para cada diagrama na ordem g_1g_3	$-\frac{4i(1+3N_f)(1+6N_f)}{\pi^2(19+9N_f+N_f^2)}$
D_{22}	Soma dos pólos ₂ para cada diagrama na ordem g_1g_3	0
D_{23}	Soma dos pólos ₃ para cada diagrama na ordem g_1g_3	$-\frac{4i}{\pi^2}$
D_{24}	Soma dos pólos ₄ para cada diagrama na ordem g_1g_3	$\frac{4i}{\pi^2}$

Tabela 3.6: Resumo dos coeficientes D' s da ordem g_1g_3 .

Coeficiente	Definição	Valor
D_{25}	Soma dos pólos ₁ para cada diagrama na ordem g_1g_4	$\frac{48i(1+3N_f)(1+6N_f)}{\pi^2(19+9N_f+N_f^2)}$
D_{26}	Soma dos pólos ₂ para cada diagrama na ordem g_1g_4	0
D_{27}	Soma dos pólos ₃ para cada diagrama na ordem g_1g_4	$\frac{16i}{\pi^2}$
D_{28}	Soma dos pólos ₄ para cada diagrama na ordem g_1g_4	$-\frac{16i}{\pi^2}$

Tabela 3.7: Resumo dos coeficientes D' s da ordem g_1g_4 .

Coeficiente	Definição	Valor
D_{29}	Soma dos pólos ₁ para cada diagrama na ordem g_2g_3	$-\frac{24i(1+3N_f)}{\pi^2(19+9N_f+N_f^2)}$
D_{30}	Soma dos pólos ₂ para cada diagrama na ordem g_2g_3	0
D_{31}	Soma dos pólos ₃ para cada diagrama na ordem g_2g_3	$-\frac{8i(5+2N_f)}{\pi^2(1+6N_f)}$
D_{32}	Soma dos pólos ₄ para cada diagrama na ordem g_2g_3	0

Tabela 3.8: Resumo dos coeficientes D' s da ordem g_2g_3

Coeficiente	Definição	Valor
D_{33}	Soma dos pólos ₁ para cada diagrama na ordem g_2g_4	$\frac{48i(1+3N_f)}{\pi^2(19+9N_f+N_f^2)}$
D_{34}	Soma dos pólos ₂ para cada diagrama na ordem g_2g_4	$\frac{24i}{\pi^2}$
D_{35}	Soma dos pólos ₃ para cada diagrama na ordem g_2g_4	$\frac{48i}{\pi^2(1+6N_f)}$
D_{36}	Soma dos pólos ₄ para cada diagrama na ordem g_2g_4	$-\frac{16i}{\pi^2}$

Tabela 3.9: Resumo dos coeficientes D' s da ordem g_2g_4 .

Coeficiente	Definição	Valor
D_{37}	Soma dos pólos ₁ para cada diagrama na ordem g_3g_4	$-\frac{16i(1+9N_f+18N_f^2)}{\pi^2(19+9N_f+N_f^2)}$
D_{38}	Soma dos pólos ₂ para cada diagrama na ordem g_3g_4	0
D_{39}	Soma dos pólos ₃ para cada diagrama na ordem g_3g_4	$\frac{16i}{\pi^2}$
D_{40}	Soma dos pólos ₄ para cada diagrama na ordem g_3g_4	$\frac{8i}{\pi^2}$

Tabela 3.10: Resumo dos coeficientes D' s da ordem g_3g_4 .

Capítulo 4

Análise dos Pontos Fixos da Teoria

4.1 Pontos Fixos da Teoria Não Reduzida

Antes de fazermos a análise dos pontos fixos, vamos reescrever as funções beta do capítulo 3 de uma maneira um pouco mais simplificada:

$$\begin{aligned}\beta_1 = & g_1 + a_1 g_1^2 + a_2 g_2^2 + a_3 g_3^2 + a_4 g_4^2 + a_5 g_1 g_2 + \\ & + a_6 g_1 g_3 + a_7 g_1 g_4 + a_8 g_2 g_3 + a_9 g_3 g_4 + a_{10} g_3 g_4\end{aligned}\quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}\beta_2 = & g_2 + b_1 g_1^2 + b_2 g_2^2 + b_3 g_3^2 + b_4 g_4^2 + b_5 g_1 g_2 + \\ & + b_6 g_1 g_3 + b_7 g_1 g_4 + b_8 g_2 g_3 + b_9 g_3 g_4 + b_{10} g_3 g_4\end{aligned}\quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}\beta_3 = & g_3 + c_1 g_1^2 + c_2 g_2^2 + c_3 g_3^2 + c_4 g_4^2 + c_5 g_1 g_2 + \\ & + c_6 g_1 g_3 + c_7 g_1 g_4 + c_8 g_2 g_3 + c_9 g_3 g_4 + c_{10} g_3 g_4\end{aligned}\quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}\beta_4 = & g_4 + d_1 g_1^2 + d_2 g_2^2 + d_3 g_3^2 + d_4 g_4^2 + d_5 g_1 g_2 + \\ & + d_6 g_1 g_3 + d_7 g_1 g_4 + d_8 g_2 g_3 + d_9 g_3 g_4 + d_{10} g_3 g_4.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Sendo os coeficientes a 's, b 's, c 's e d 's dados por

$$\begin{aligned}a_1 = & \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_1 - iD_1); \quad a_2 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_5); \quad a_3 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_9); \quad a_4 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{13}); \\ a_5 = & \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_2 - iD_{17}); \quad a_6 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_3 - iD_{21}); \quad a_7 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_4 - iD_{25}); \quad a_8 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{29}); \\ a_9 = & \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{33}); \quad a_{10} = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{37}); \quad b_1 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_2); \quad b_2 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_2 - iD_6); \\ b_3 = & \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{10}); \quad b_4 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{14}); \quad b_5 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_1 - iD_{18}); \quad b_6 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_2 - iD_{22}); \\ b_7 = & \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{26}); \quad b_8 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_3 - iD_{30}); \quad b_9 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_4 - iD_{34}); \quad b_{10} = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{38}); \\ c_1 = & \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_3); \quad c_2 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_7); \quad c_3 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_3 - iD_{11}); \quad c_4 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{15}); \\ c_5 = & \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{19}); \quad c_6 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_1 - iD_{23}); \quad c_7 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{27}); \quad c_8 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_2 - iD_{31}); \\ c_9 = & \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{35}); \quad c_{10} = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_4 - iD_{39}); \quad d_1 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_4); \quad d_2 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_8); \end{aligned}$$

$$d_3 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{12}); \quad d_4 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_4 - iD_{16}); \quad d_5 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{20}); \quad d_6 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{24});$$

$$d_7 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_1 - iD_{28}); \quad d_8 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(-iD_{32}); \quad d_9 = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_2 - iD_{36}); \quad d_{10} = \frac{2m^2}{\Lambda^2}(B_3 - iD_{40}).$$

Nesta seção vamos determinar quais valores de g_j^* ($j = 1, 2, 3, 4$) que anulam as funções betas da teoria. A análise dos pontos fixos é importante porque é a partir dela que podemos determinar se a nossa série perturbativa está coerente e se nossa condição $p \ll \Lambda$ é consistente. O estudo do modelo geral é muito complexo, e uma análise da estabilidade dos pontos fixos torna-se muito complicada devido a termos quatro funções betas com quatro constantes a serem analisadas de forma simultânea. Para tanto, vamos nos concentrar em analisar o setor proporcional a g_3 e g_4 da lagrangeana (2.1), que correspondem ao termo quiral e axial, respectivamente. A escolha deste setor é também motivada pelo fato de ser a única combinação de constante de acoplamento duas a duas que é possível fazer a redução de constante, uma vez que qualquer outra combinação está fora das condições de aplicação do método, como veremos adiante.

Para este setor temos que as funções beta são dadas por (fizemos $g_1 = g_2 = 0$ de partida na lagrangeana (2.1))

$$\beta_3 = g_3 + c_3 g_3^2 + c_4 g_4^4 + c_{10} g_3 g_4, \quad (4.5)$$

e

$$\beta_4 = g_4 + d_4 g_4^2 + d_{10} g_3 g_4, \quad (4.6)$$

sendo que os coeficientes acima são dados por

$$c_3 = 2 \frac{m^2}{\Lambda^2} (B_3 - iD_{11}) = \frac{8m^2(1 - 6N_f)}{\Lambda^2 \pi^2}$$

$$c_4 = 2 \frac{m^2}{\Lambda^2} (-iD_{15}) = -\frac{8m^2(-8 + 3N_f + 90N_f^2)}{\Lambda^2 \pi^2 (1 + 6N_f)(9N_f^2 - 1)}$$

$$c_{10} = 2 \frac{m^2}{\Lambda^2} (B_4 - iD_{39}) = \frac{32m^2}{\Lambda^2 \pi^2}$$

$$d_3 = 2 \frac{m^2}{\Lambda^2} (-iD_{12}) = 0$$

$$d_4 = 2 \frac{m^2}{\Lambda^2} (B_4 - iD_{16}) = -\frac{4m^2(-6 - 15N_f + 72N_f^2 + 216N_f^3)}{\Lambda^2 \pi^2 (-1 + 9N_f^2)}$$

$$d_{10} = 2 \frac{m^2}{\Lambda^2} (B_3 - iD_{40}) = \frac{16m^2}{\Lambda^2 \pi^2}.$$

Resolvendo o sistema (4.5) e (4.6), encontramos quatro pares de pontos fixos detalhados abaixo

Solução 1:

$$\begin{cases} g_3^* = 0 \\ g_4^* = 0 \end{cases}$$

Solução 2:

$$\begin{cases} g_3^* = -1/c_3 \\ g_4^* = 0 \end{cases}$$

Solução 3:

$$\begin{cases} g_3^* = \frac{\alpha - d_4 \sqrt{\Delta}}{\theta} \\ g_4^* = \frac{\sigma + d_{10} \sqrt{\Delta}}{\theta} \end{cases}$$

Solução 4:

$$\begin{cases} g_3^* = \frac{\alpha + d_4 \sqrt{\Delta}}{\theta} \\ g_4^* = \frac{\sigma - d_{10} \sqrt{\Delta}}{\theta} \end{cases}$$

sendo

$$\alpha = -2c_4 d_{10} + c_{10} d_4 - d_4^2,$$

$$\Delta = c_{10}^2 - 4c_3 c_4 + 4c_4 d_{10} - 2c_{10} d_4 + d_4^2,$$

$$\sigma = c_{10} d_{10} - 2c_3 d_4 + d_{10} d_4,$$

$$\theta = 2c_4 d_{10}^2 + 2c_3 d_4^2 - 2c_{10} d_4 d_{10}.$$

O comportamento de cada um dos pares é mostrado nos gráficos (4.1), (4.2) e (4.3), notando que os pontos fixos dependem somente de N_f uma vez que tomamos $N_c = 3$ e consideramos $\Lambda \approx m$.

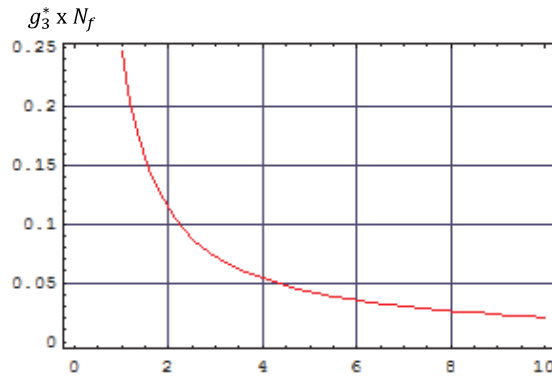


Figura 4.1: Gráfico da solução 2

Como temos duas funções beta que dependem de duas constantes de acoplamento originais da teoria, a estrutura dos pontos fixos torna-se muito complexa. Por outro lado, a natureza dos pontos fixos pode ser analisada utilizando o formalismo de redução proposto por Zimmermann, detalhado na próxima seção.

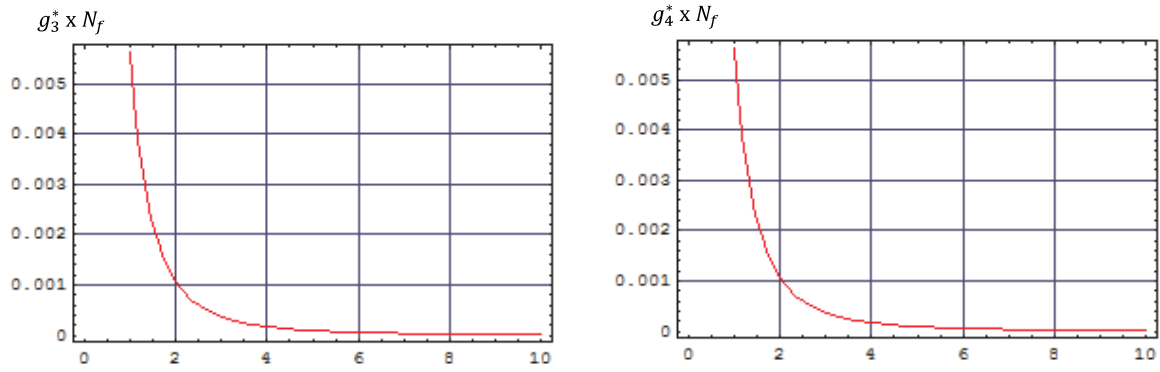


Figura 4.2: Gráfico da solução 3

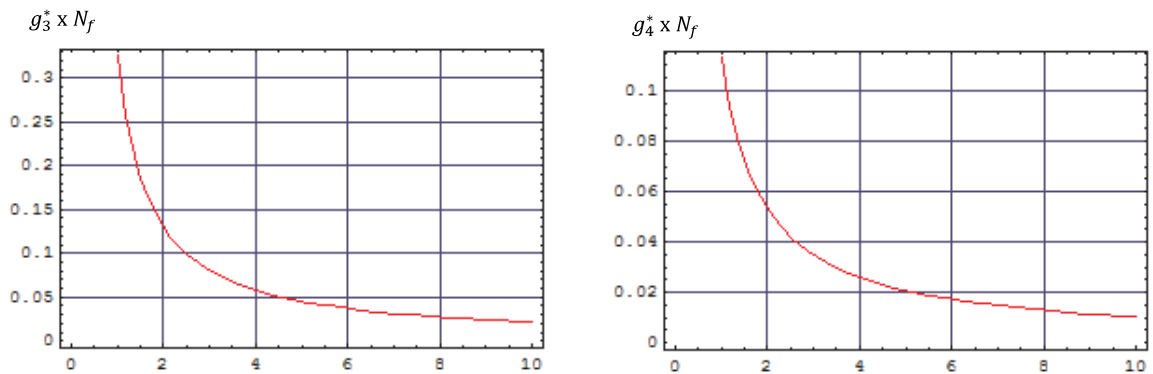


Figura 4.3: Gráfico da solução 4

4.2 Redução das Constantes de Acoplamento

4.2.1 Apresentação do Método

O estudo da redução das constantes de acoplamento foi primeiramente proposto por Zimmermann [45] para teorias de massa nula e que por critério de contagem de potência são renormalizáveis. A relação entre as constantes de acoplamento se baseia em argumentos de simetria e permite obter um vínculo sobre as soluções da equação do grupo de renormalização. O vínculo entre as constantes de acoplamento proposto por Zimmermann é tal que a redução deveria ser analítica. Isto é, se temos duas constantes de acoplamento α e λ , a teoria mais fundamental contém apenas uma constante, digamos $\lambda(\alpha)$, que é analítica em α , uma vez que a expansão perturbativa não gera potências fracionárias, irracionais, complexas ou inteiro negativas em α . A mesma idéia tem sido aplicada no caso de teorias efetivas com acoplamento não renormalizáveis e teorias massivas [46].

O método de redução consiste em expressar $n + 1$ constantes de acoplamento, g_0, g_1, \dots, g_n , como função de uma única, digamos g_0 , de maneira que se obten um modelo “reduzido” envolvendo apenas o acoplamento g_0 , de tal modo que todas as constantes de acoplamento possam ser es-

critas em uma série de potências de g_0 do tipo

$$g_j = g_j(g_0) = \rho_0 g_0 + \sum_i \rho_i g_0^{i+1} \quad (4.7)$$

com $j = 1, \dots, n$, sendo que $g_j(g_0)$ é invariante pelas transformações do grupo de renormalização e satisfaz a condição de acoplamento fraco que quando $g_0 \rightarrow 0$ devemos ter que $g_j \rightarrow 0$.

Assim como a teoria original, a teoria reduzida é invariante sobre as transformações do grupo de renormalização. Logo, as funções de Green satisfazem, para a teoria original

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial g_j} - N\gamma \right) \Gamma^{(N)}(p_1, \dots, p_N; g_j) = 0 \quad (4.8)$$

e para teoria não reduzida

$$\left(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta_0 \frac{\partial}{\partial g_0} - N\gamma \right) \Gamma^{(N)}(p_1, \dots, p_N; g_j(g_0)) = 0. \quad (4.9)$$

Resultando que as funções beta para o sistema original β_j e para o sistema reduzido β_0 relacionam-se de acordo com a seguinte equação diferencial

$$\beta_j = \frac{\partial g_j}{\partial g_0} \beta_0, \quad (4.10)$$

que formam as condições necessárias e suficiente para redução [45].

Como ilustração deste método vamos considerar o modelo pseudo-escalar de Yukawa, que consiste da interação de campos espinoriais com um campo escalar em $(3+1)D$. A densidade de lagrangeana da teoria é dada por

$$\mathcal{L}_{int} = g \bar{\psi} \gamma^5 \psi \phi.$$

O modelo é não renormalizável, pois em 1-loop haverá a indução de um contra-termo proporcional a ϕ^4 para cancelar a divergência logarítmica. Assim, para renormalizar a teoria devemos adicionar à lagrangeana o termo $-\frac{\lambda}{4!} \phi^4$, logo

$$\mathcal{L}_{int} = g \bar{\psi} \gamma^5 \psi \phi - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (4.11)$$

O modelo agora apresenta duas constantes de acoplamento e betas dadas por [45]

$$\beta_g(g) = \frac{5}{16\pi^2} g^4 \text{ e } \beta_\lambda(\lambda, g) = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{3}{2} \lambda^2 + 4\lambda g^2 - 14g^4 \right). \quad (4.12)$$

Vamos aplicar o método de redução de constantes escolhendo como constante de acoplamento efetiva g . Assim, temos que em ordem mais baixa $\lambda = \rho_0 g^2$ e $\beta_\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial g} \beta_g = \rho_0 \beta_g$. Utilizando essas informações juntamente com as funções beta dadas acima, encontramos que ρ_0 satisfaz a seguinte equação

$$\rho_0^2 - \frac{2}{3} \rho_0 - 24 = 0 \quad (4.13)$$

que fornece os seguintes resultados

$$\rho_0 = \frac{1 \pm \sqrt{145}}{3}. \quad (4.14)$$

Utilizaremos a solução em que ρ_0 é positivo, que corresponde a $\rho_0 = \frac{1+\sqrt{145}}{3}$. Deste modo, chegamos que

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{145}}{3} g^2 \quad (4.15)$$

e conseqüentemente

$$\beta_\lambda = \frac{1 + \sqrt{145}}{3} \frac{5}{16\pi^2} g^4, \quad (4.16)$$

sendo a última a função beta para o sistema reduzido.

4.2.2 Estabilidade dos Pontos Fixos da Teoria Reduzida

Para o nosso sistema (4.5) e (4.6) escolheremos fazer a seguinte redução (em ordem mais baixa)

$$g_3 = \rho_0 g_4,$$

e assim temos a relação

$$\beta_3 = \frac{\partial g_3}{\partial g_4} \beta_4 = \rho_0 \beta_4. \quad (4.17)$$

Com isso, ρ_0 é obtido pela seguinte equação

$$(c_3 - d_{10})\rho_0^2 + (c_{10} - d_4)\rho_0 + c_4 = 0,$$

cujas soluções nos fornece dois ρ_0 reais e positivos

$$\rho_0^{(1)} = \frac{-c_{10} + d_4 + \sqrt{\Delta}}{2(c_3 - d_{10})} \quad \text{e} \quad \rho_0^{(2)} = \frac{-c_{10} + d_4 - \sqrt{\Delta}}{2(c_3 - d_{10})},$$

como podemos ver no gráfico (4.4). Quando N_f é muito grande $\rho_0^{(1)}$ tende a zero e $\rho_0^{(2)}$ tende a 2; quando N_f tende a um valor muito pequeno próximo a 1 temos que $\rho_0^{(1)}$ tende a 0,0046 e $\rho_0^{(2)}$ tende a 2,9507. Para fazer a redução escolheremos $\rho_0^{(1)}$. Em ambos os casos $\rho_0^{(1)}$ e $\rho_0^{(2)}$ diminuem com o aumento de N_f . Sendo assim, a partir da equação (4.17) a função beta do sistema reduzido será

$$\beta_4 = g_4 + (d_4 + d_{10}\rho_0^{(1)})g_4^2, \quad (4.18)$$

com pontos fixos dados por

$$g_4^* = 0, \quad (4.19)$$

e

$$g_4^* = -\frac{1}{d_4 + d_{10}\rho_0^{(1)}}. \quad (4.20)$$

Uma análise gráfica da função beta do sistema reduzido e do ponto fixo não trivial é mostrada nas figuras (4.5), (4.6) e (4.7). Tomando a derivada de (4.18) temos

$$\beta'_4 = 1 + 2(d_4 + d_{10}\rho_0^{(1)})g_4. \quad (4.21)$$

Agora calculando a derivada tomada para cada um dos pontos fixos, temos que para a origem (4.19)

$$\left. \frac{d\beta_4}{dg_4} \right|_{g_4^*=0} = 1 \quad (4.22)$$

o que indica que a mesma é infravermelho estável, logo a condição $p \ll \Lambda$ e série perturbativa estão consistentes. Para o ponto não trivial (4.20) obtemos

$$\left. \frac{d\beta_4}{dg_4} \right|_{g_4^* = -\frac{1}{d_4 + d_{10}\rho_0^{(1)}}} = -1 \quad (4.23)$$

implicando em um ponto fixo ultravioleta estável.

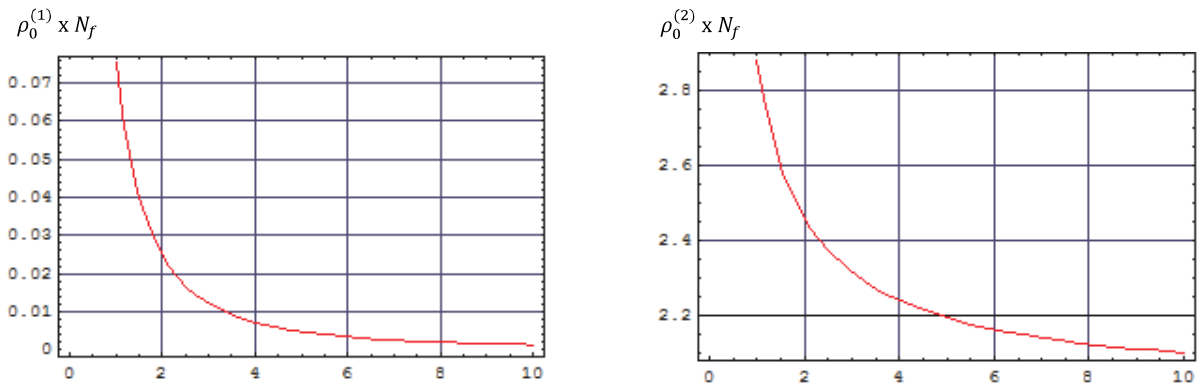


Figura 4.4: Gráfico dos ρ_0 's em função de N_f

Caso tivéssemos escolhido como beta efetiva β_3 obteríamos os mesmos pontos fixos. Mas, a derivada de β_3 calculada nos pontos fixos seria diferente, seria uma função de N_f , porém a natureza dos pontos fixos seria a mesma, a origem infravermelho estável e o outro ponto fixo diferente do trivial ultravioleta estável.

Poderíamos ter escolhido também a seguinte redução $g_3 = \rho_0^{(2)} g_4$ e conseqüentemente $\beta_3 = \rho_0^{(2)} \beta_4$. Para esta situação teríamos resultados análogos aos obtidos anteriormente, pontos fixos iguais independente da escolha de qual beta ser tomada como beta efetiva e com a mesma natureza dos pontos fixos.

Outra possibilidade seria ao invés de escolher como constante de acoplamento efetiva g_4 , escolhermos g_3 . Nessa situação encontraríamos a seguinte relação $g_4 = \rho_0 g_3$ e $\beta_4 = \rho_0 \beta_3$, sendo que ρ_0 satisfaz a equação $c_4\rho_0^2 + (c_{10} - d_4)\rho_0 + c_3 - d_{10} = 0$, fornecendo assim uma outra possibilidade de redução, dois ρ_0 reais e positivos. Chamaremos estes de $\rho_0^{(3)}$ e $\rho_0^{(4)}$, que comportam-se como: $\rho_0^{(3)}$ tende a 217,732 para N_f tendendo a 1 e a para N_f muito grande

tende a ∞ ; para $\rho_0^{(4)}$ temos para pequenos valores e grandes valores de N_f , respectivamente, 0, 3389 e 0, 5. Em ambos os casos $\rho_0^{(3)}$ e $\rho_0^{(4)}$ aumentam com o aumento de N_f . Se escolhermos $g_4 = \rho_0^{(3)} g_3$ e $\beta_4 = \rho_0^{(3)} \beta_3$ obteremos independente da escolha de beta efetiva pontos fixos iguais e com a mesma natureza, a origem infravermelho estável e o diferente do trivial ultravioleta estável. Se a escolha fosse $g_4 = \rho_0^{(4)} g_3$ e $\beta_4 = \rho_0^{(4)} \beta_3$, teríamos resultados análogos, pontos fixos iguais independente da escolha de qual beta ser tomada como beta efetiva e com a mesma natureza.

De forma resumida temos que independente da escolha de qual constante de acoplamento ser escolhida como constante efetiva, de qual ρ_0 usar e de qual β escolher como beta efetiva, sempre teremos a natureza da origem como sendo infravermelho estável e o outro ponto fixo ultravioleta estável. Outra observação é que o ponto fixo não trivial em qualquer escolha de redução será sempre inversamente proporcional a N_f .

Na tabela (4.1) mostramos de forma resumida as análises dos pontos fixos para os outros setores do modelo de NJJ e na tabela (4.2) alguns valores do ponto fixo do sistema reduzido g_4^* para um valor fixo de N_f .

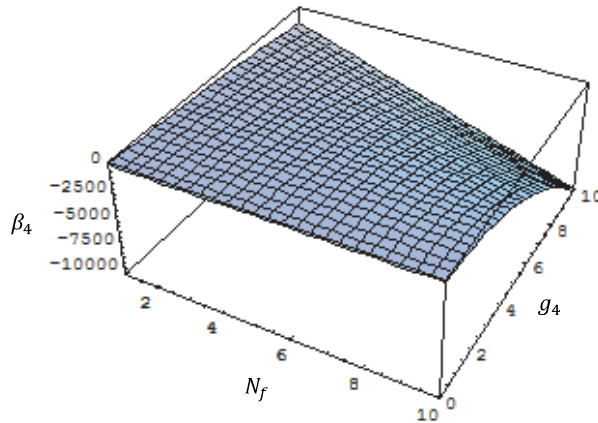


Figura 4.5: Gráfico da função beta do sistema reduzido $\beta_4 \times N_f \times g_4$.

Setor	Redução	Estabilidade
g_1	Não foi necessário	Origem IR Estável e o outro ponto fixo UV Estável
g_2	Não foi necessário	Origem IR Estável
g_3	Não foi necessário	Origem IR Estável e o outro ponto fixo UV Estável
g_4	Não foi necessário	Origem IR Estável e o outro ponto fixo UV Estável
g_{1g_2}	ρ_0 complexo	Não foi possível
g_{1g_3}	ρ_0 complexo	Não foi possível
g_{1g_4}	ρ_0 complexo	Não foi possível
g_{2g_3}	ρ_0 complexo	Não foi possível
g_{2g_4}	ρ_0 negativo	Não foi possível
g_{3g_4}	2 ρ_0 reais e positivos	Origem IR Estável e o outro ponto fixo UV Estável

Tabela 4.1: Resumo das análises de estabilidade do modelo de NJL .

N_f	1	5	10	30	50	100	∞
g_4^*	0,0739	0,0192	0,0099	0,0033	0,0020	0,0010	0

Tabela 4.2: Alguns valores do ponto fixo do sistema reduzido g_4^* para um valor fixo de N_f .

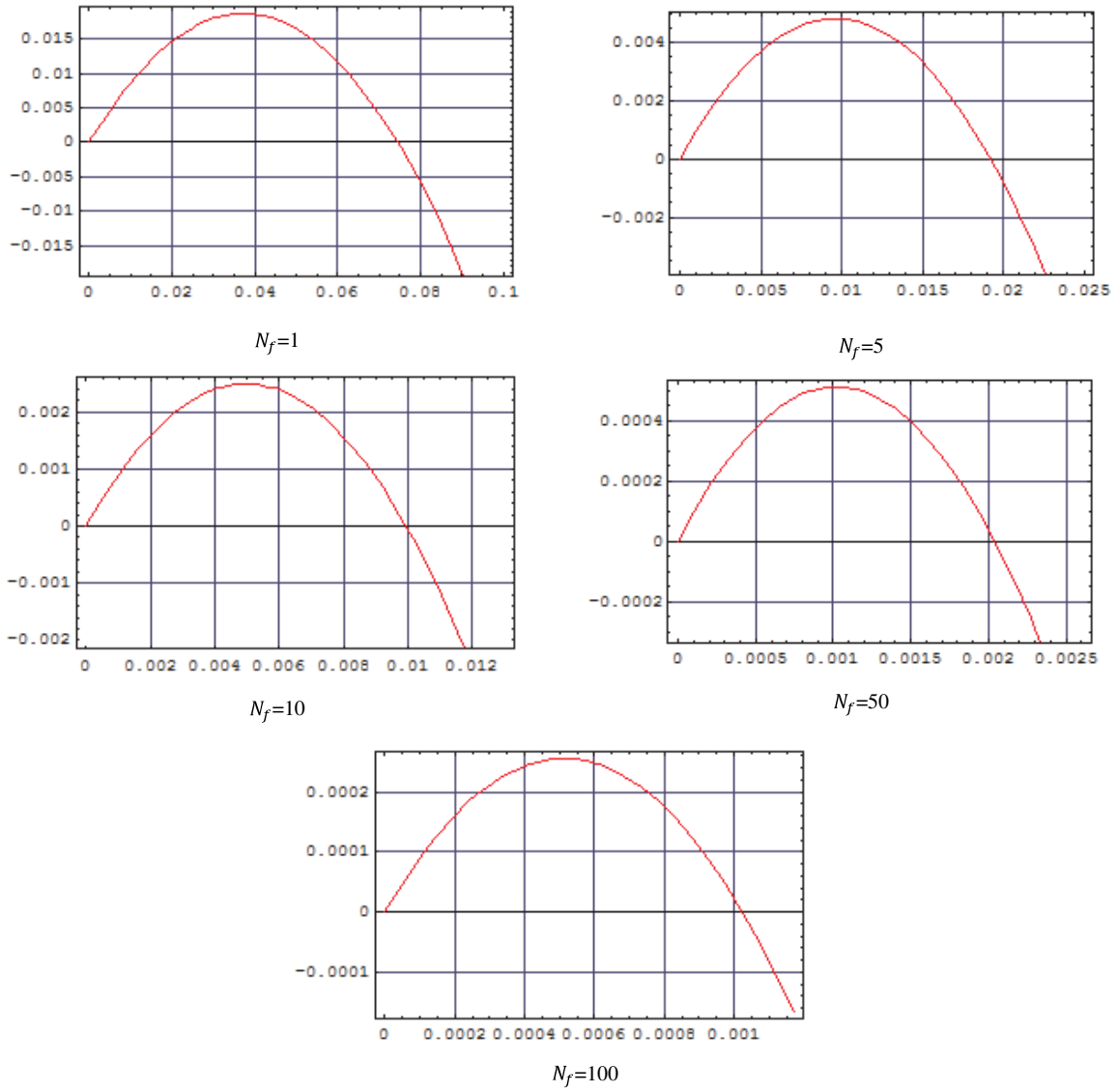


Figura 4.6: Gráfico da função beta do sistema reduzido $\beta_4 \times g_4$, para alguns valores de N_f fixos.

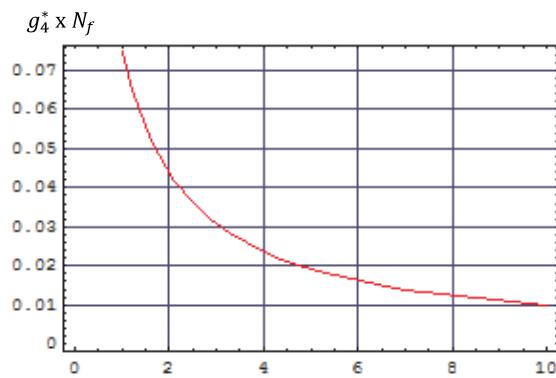


Figura 4.7: Gráfico do ponto fixo reduzido não trivial em função de N_f .

Conclusão

Neste trabalho analisamos os pontos fixos para uma teoria que de partida era não-renormalizável, mas quando tratada na escala tal que $p \ll \Lambda$ pode ser tratada como renormalizável (nesse caso dita como uma teoria efetiva). A partir dessa condição, calculamos os diversos processos de correções radiativas para as funções de dois e quatro pontos na ordem de 1-loop, sendo que no caso da função de quatro pontos consideramos que o momento externo que passa pelo vértice é nulo (utilizando a condição $p \ll \Lambda$). Em seguida fizemos um estudo das funções do grupo de renormalização do modelo, em especial da função beta uma vez que nosso interesse era estudar a natureza dos pontos fixos da teoria (foi considerado $\Lambda \approx m$ e tomado $N_c = 3$). Na construção da teoria efetiva utilizamos a regularização dimensional, pois de acordo [42] este é o método mais conveniente para garantir que contra-termos de ordem mais elevadas possam ser desprezados.

O estudo dos pontos fixos do modelo completo, considerando os quatro setores proporcionais as interações tipo Gross-Neveu (g_1), Thirring (g_2), Quiral (g_3) e Axial (g_4), mostrou-se muito complexo e de difícil análise de estabilidade dos mesmos. Pois, inicialmente tínhamos um sistema de quatro equações com quatro variáveis acopladas a ser analisado. Tentamos resolver o sistema (2.17), (2.18), (2.19) e (2.20) utilizando um programa computacional sem sucesso. Em seguida, pensamos que seria interessante estudar as várias combinações de dois setores da lagrangeana original do modelo de NJL que estão detalhadas abaixo.

A análise dos pontos fixos da teoria foi feita em duas etapas: (i) Sem redução: calculando os pontos fixos para o sistema das duas funções betas (4.5) e (4.6) que dependem de duas constantes de acoplamento g_3 e g_4 . Obtivemos quatro pares de soluções, o trivial e mais 3 pares de soluções que são positivas e diminuíam com o aumento de N_f . Para as demais combinações de constantes tomadas duas a duas obtivemos para g_1 e g_2 a solução trivial e três pares de solução complexas, no caso de g_1 e g_3 e g_1 e g_4 não conseguimos obter nenhum resultado pois o programa computacional utilizado nos cálculos não conseguiu resolver o sistema de equações para estes setores. Para o setor g_2 e g_3 e para g_2 e g_4 encontramos resultados semelhantes ao setor g_3 e g_4 , a solução trivial e outros pares que podem ser positivos ou negativos e que diminuíam ou cresciam com N_f . Uma vez calculado os pontos fixos, não foi possível fazer o estudo da estabilidade dos mesmos e classificá-los devido a termos duas funções betas com duas constantes de acoplamento a serem analisadas de forma simultânea. (ii) Para conseguimos fazer a análise de estabilidade

usamos o método de redução de constantes de acoplamento de Zimmermann. O único setor que foi possível fazer a redução foi o setor proporcional a g_3 e g_4 , pois os demais não se enquadravam nas condições de redução (ver tabela (4.1)) [45]. Para este setor escolhemos como constante de acoplamento efetiva g_4 e obtivemos dois pontos fixos. O primeiro ponto é a origem que tem comportamento infravermelho estável, indicando que a condição utilizada para os nossos cálculos $p \ll \Lambda$ e a série perturbativa estão consistentes. O segundo ponto fixo encontrado tem comportamento ultravioleta estável.

O estudo individual para cada setor do modelo de NJL também foi feita, sendo que obtivemos para todos os casos que a origem tem comportamento infravermelho estável e o outro ponto fixo comportamento ultravioleta estável. Uma observação importante é que o termo proporcional a g_2 possui como ponto fixo somente a origem.

Alguns dos principais resultados mencionados acima foram apresentados em alguns eventos de física [48]. Possíveis extensões do trabalho seriam: estudar o modelo completo só que agora inserindo operadores compostos do tipo $\bar{\psi}\partial^2\psi$ ou $\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi$ e verificar comportamento de sua dimensão anômala (neste trabalho foi encontrado que a dimensão anômala do campo básico ψ é nulo na ordem considerada). Outra possibilidade é usar o mesmo método aplicado no cálculo dos diagramas de Feynman para outras versões de interações quárticas fermiônicas, como por exemplo o modelo invariante quirial $\mathcal{L}_{int} = g[(\bar{\psi}\psi)^2 - (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2]$, com ou sem acoplamento mínimo com um campo de calibre.

Apêndice A

Notação no Espaço de Minkowski

Neste apêndice resumimos nossa notação e convenções no espaço de Minkowski. Utilizamos o sistema de unidades naturais onde $c = \hbar = 1$.

Utilizamos a seguinte métrica,

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

e o tensor anti-simétrico $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ é $+1$ se tivermos permutações pares de $0, 1, 2, 3$; -1 se as permutações forem ímpares e 0 se tivermos pelo menos dois índices repetidos, por exemplo ϵ^{0012} . Outras identidades importantes envolvendo $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ são

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu}^{\rho'\sigma'} = -2(g^{\rho\rho'}g^{\sigma\sigma'} - g^{\rho\sigma'}g^{\rho'\sigma}), \quad \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho}^{\sigma'} = -6g^{\sigma\sigma'} \text{ e } \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24$$

A.1 Representação e Algumas Propriedades das Matrizes de Dirac

Usaremos a representação das matrizes de Dirac em $(3 + 1)$ dimensões dadas por [47]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

e

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

sendo σ^i ($i = 1, 2, 3, 4$) as matrizes de Pauli escritas como

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

e

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Elas obedecem as seguintes relações fundamentais,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu = [\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i \epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho, \quad (\text{A.8})$$

com a segunda válida para $D = 3$. Podemos encontrar uma terceira relação fundamental somando as equações (A.7) e (A.8) e obter imediatamente que

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} I - i \epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho. \quad (\text{A.9})$$

Outras relações importantes entre as matrizes de Dirac são

$$\gamma_5 = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = i\gamma^3\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = \gamma_5^+ \quad e \quad (\gamma^5)^2 = I.$$

A partir das definições das matrizes de Dirac e das relações fundamentais acima, podemos escrever as seguintes propriedades de traço:

$$\text{Tr}(I) = 4, \quad (\text{A.10})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu) = 0, \quad (\text{A.11})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5) = 0, \quad (\text{A.12})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu) = 0, \quad (\text{A.13})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5) = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}), \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (\text{A.17})$$

valendo resaltar que em $D = 4$ o traço com número ímpar de matrizes de Dirac é sempre 0, exceto pelo $\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)$.

A.2 Parâmetros de Feynman e a Regularização Dimensional

Para se combinar os propagadores no denominador de um diagrama de Feynman se introduz integrais sobre parâmetros, denominados de parâmetros de Feynman. A seguir apresentamos a integral paramétrica utilizada neste trabalho. No caso de apenas dois denominadores temos

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{[ax + (1-x)b]^{\alpha+\beta}}. \quad (\text{A.18})$$

Usamos a seguinte tabela de integrais em D dimensões no espaço de Minkowski [41]

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^\alpha} = \frac{i^{2\alpha+1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \Delta^{\frac{D}{2}-\alpha} , \quad (\text{A.19})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta)^\alpha} = \frac{i^{2\alpha-1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha)} \Delta^{\frac{D}{2}+1-\alpha} , \quad (\text{A.20})$$

que são casos particulares da fórmula geral

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^a}{(k^2 - \Delta)^b} = (-1)^{D-a} \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Delta^{\frac{D}{2}+a-b} \frac{\Gamma(b - a - \frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2} + a)}{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(b)} . \quad (\text{A.21})$$

Apêndice B

Simetrias do modelo

A transformação quiral para um spinor de Dirac é definida como [1, 37]

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)\gamma^5} \psi(x) \quad \text{e} \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{i\alpha(x)\gamma^5}, \quad (\text{B.1})$$

sendo $\alpha(x)$ um parâmetro que depende das coordenadas do espaço-tempo. Expandindo a exponencial até primeira ordem em $\alpha(x)$ e aplicando essa transformação para nossa lagrangeana (2.1), temos que os bilineares transformam-se da seguinte forma

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}\psi + 2i\alpha\bar{\psi}\psi, \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &\rightarrow \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \\ \bar{\psi}\gamma^5\psi &\rightarrow \bar{\psi}\gamma^5\psi + 2i\alpha\bar{\psi}\psi, \\ \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi &\rightarrow \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi, \end{aligned}$$

e conseqüentemente temos

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\psi)^2 + 4i\alpha(\bar{\psi}\gamma^5\psi)(\bar{\psi}\psi), \\ (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2, \\ (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2 + 4i\alpha(\bar{\psi}\gamma^5\psi)(\bar{\psi}\psi), \\ (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi)^2, \end{aligned}$$

implicando que os termos Thirring $(\bar{\psi}\lambda^a\gamma^\mu\psi)^2$ e Axial $(\bar{\psi}\lambda^a\gamma^5\gamma^\mu\psi)^2$ são invariantes quirais; e os termos de massa $-m\bar{\psi}\psi$, Gross-Neveu $(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2$ e Quiral $(\bar{\psi}\lambda^a\gamma^5\psi)^2$ quebram esta simetria.

Para a transformação de paridade [1, 37] em que $x^\mu \rightarrow x'^\mu = (x^0, -x^i)$, os espinores mudam como

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} \rightarrow A\psi'(x') \quad \text{e} \quad \mathcal{P}\bar{\psi}(x)\mathcal{P}^{-1} \rightarrow -\bar{\psi}'(x')A, \quad (\text{B.2})$$

sendo $A = i\gamma^0$ que satisfaz as seguintes propriedades

$$A = -A^{-1} = -A^\dagger.$$

Para os bilineares, temos que os mesmo se transformam como

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}\psi, \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &\rightarrow \begin{cases} \bar{\psi}\gamma^0\psi \\ -\bar{\psi}\gamma^i\psi \end{cases}, \\ \bar{\psi}\gamma^5\psi &\rightarrow -\bar{\psi}\gamma^5\psi, \\ \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi &\rightarrow \begin{cases} -\bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\psi \\ \bar{\psi}\gamma^5\gamma^i\psi \end{cases},\end{aligned}$$

e assim temos

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\psi)^2 \\ (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2, \\ (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2, \\ (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi)^2,\end{aligned}$$

indicando que a lagrangeana de interação e o termo massa são invariantes por transformação de paridade.

Para a transformação de conjugação de carga [1, 37] os espinores mudam como

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} \rightarrow \bar{\psi}(x)C \quad \text{e} \quad \mathcal{C}\bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1} \rightarrow -C\bar{\psi}(x), \quad (\text{B.3})$$

sendo $C = i\gamma^2\gamma^0$ que satisfaz as seguintes propriedades

$$C = -C^{-1} = -C^T = -C^\dagger.$$

Para os bilineares temos

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}\psi, \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &\rightarrow -\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ \bar{\psi}\gamma^5\psi &\rightarrow \bar{\psi}\gamma^5\psi, \\ \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi &\rightarrow \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\psi)^2 \\ (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2, \\ (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2, \\ (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi)^2,\end{aligned}$$

indicando que a lagrangeana de interação e o termo de massa são invariantes por transformação de conjugação de carga.

Para a transformação de reversão temporal [1, 37] em que $x^\mu \rightarrow x'^\mu = (-x^0, x^i)$, os espiniores mudam como

$$\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} \rightarrow B\psi'(x') \quad \text{e} \quad \mathcal{T}\bar{\psi}(x)\mathcal{T}^{-1} \rightarrow -\bar{\psi}'(x')B, \quad (\text{B.4})$$

sendo $B = i\gamma^1\gamma^3$ que satisfaz as seguintes propriedades

$$B = B^{-1} = B^\dagger.$$

Para os bilineares, temos que os mesmo se transformam como

$$\begin{aligned} \bar{\psi}\psi &\rightarrow \bar{\psi}\psi, \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &\rightarrow \begin{cases} \bar{\psi}\gamma^0\psi \\ -\bar{\psi}\gamma^i\psi \end{cases}, \\ \bar{\psi}\gamma^5\psi &\rightarrow \bar{\psi}\gamma^5\psi, \\ \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi &\rightarrow \begin{cases} \bar{\psi}\gamma^5\gamma^0\psi \\ -\bar{\psi}\gamma^5\gamma^i\psi \end{cases}, \end{aligned}$$

e assim temos

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\psi)^2 \\ (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2, \\ (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2, \\ (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi)^2 &\rightarrow (\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi)^2, \end{aligned}$$

indicando que a lagrangeana de interação e o termo de massa são invariantes por reversão temporal

Um resumo das simetrias do modelo é detalhado na tabela (B.1).

Simetria/Termo	$m\bar{\psi}\psi$	$(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2$	$(\bar{\psi}\lambda^a\gamma^\mu\psi)^2$	$(\bar{\psi}\lambda^a\gamma^5\psi)^2$	$(\bar{\psi}\lambda^a\gamma^5\gamma^\mu\psi)^2$
Quiral	Quebra	Quebra	Invariante	Quebra	Invariante
Paridade	Invariante	Invariante	Invariante	Invariante	Invariante
Conjugação de carga	Invariante	Invariante	Invariante	Invariante	Invariante
Reversão Temporal	Invariante	Invariante	Invariante	Invariante	Invariante

Tabela B.1: Resumo das simetrias do Modelo de Nambu-Jona-Lasinio.

Apêndice C

Diagramas de Feynman

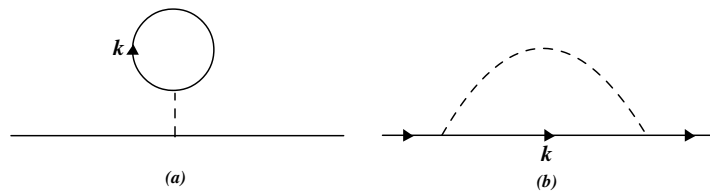


Figura C.1: Diagrama de dois pontos com vértice Gross-Neveu.

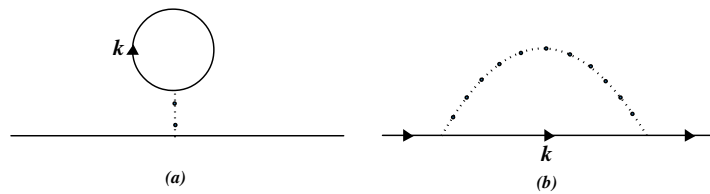


Figura C.2: Diagrama de dois pontos com vértice Thirring.

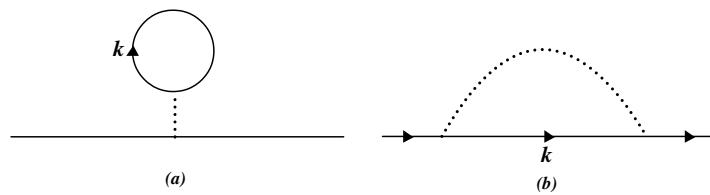


Figura C.3: Diagrama de dois pontos com vértice Quiral.

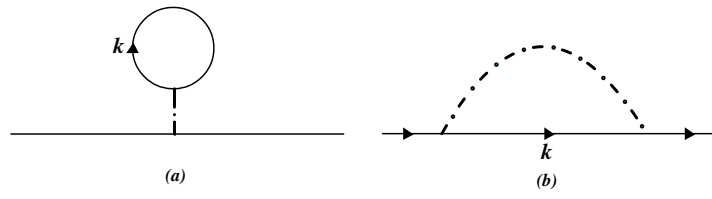


Figura C.4: Diagrama de dois pontos com vértice Axial.

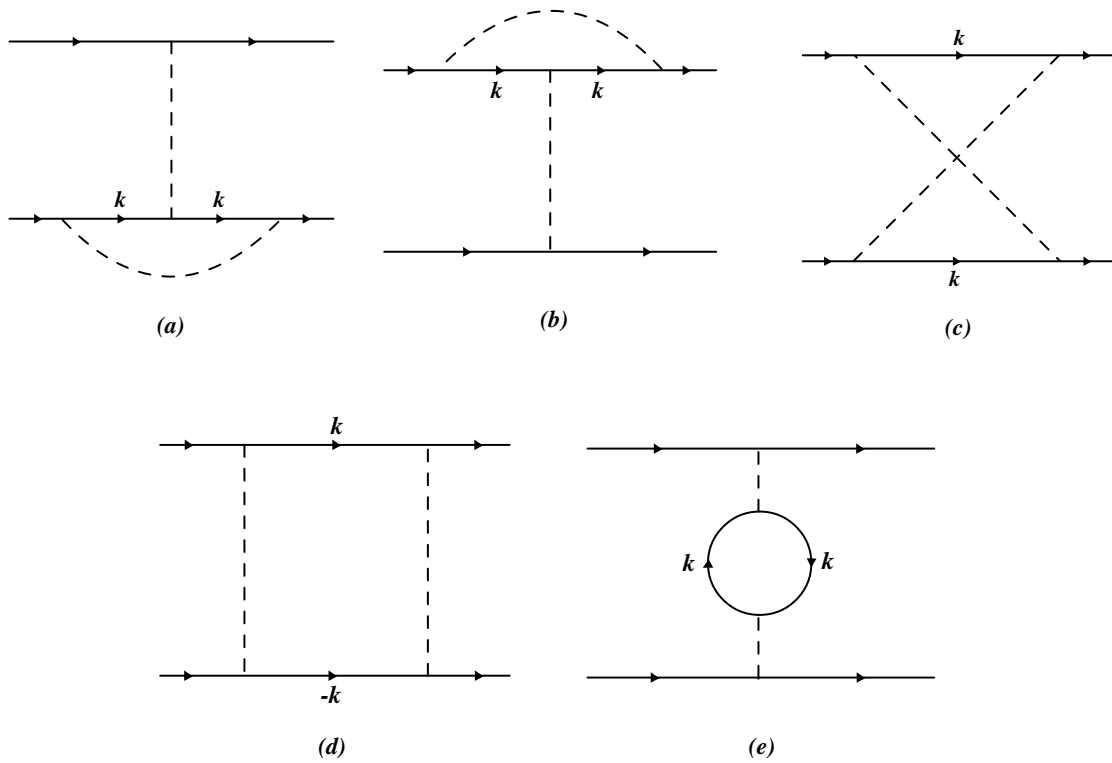


Figura C.5: Diagrama de quatro pontos com dois vértices Gross-Neveu.

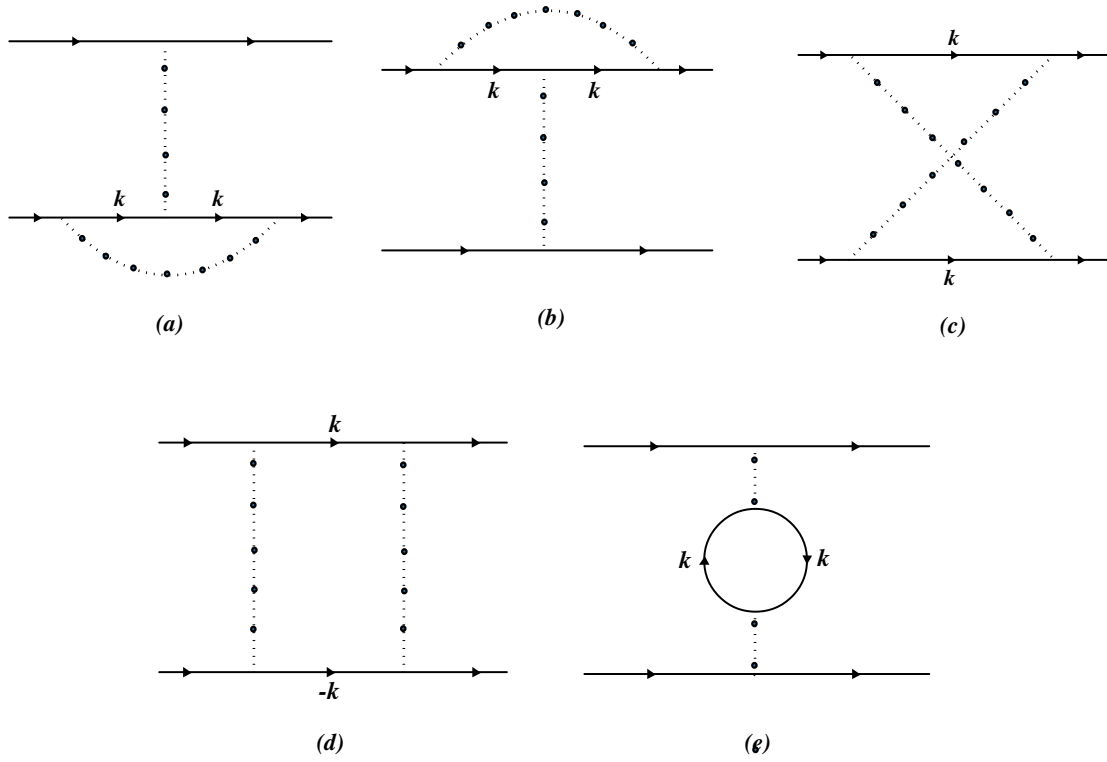


Figura C.6: Diagrama de quatro pontos com dois vértices Thirring.

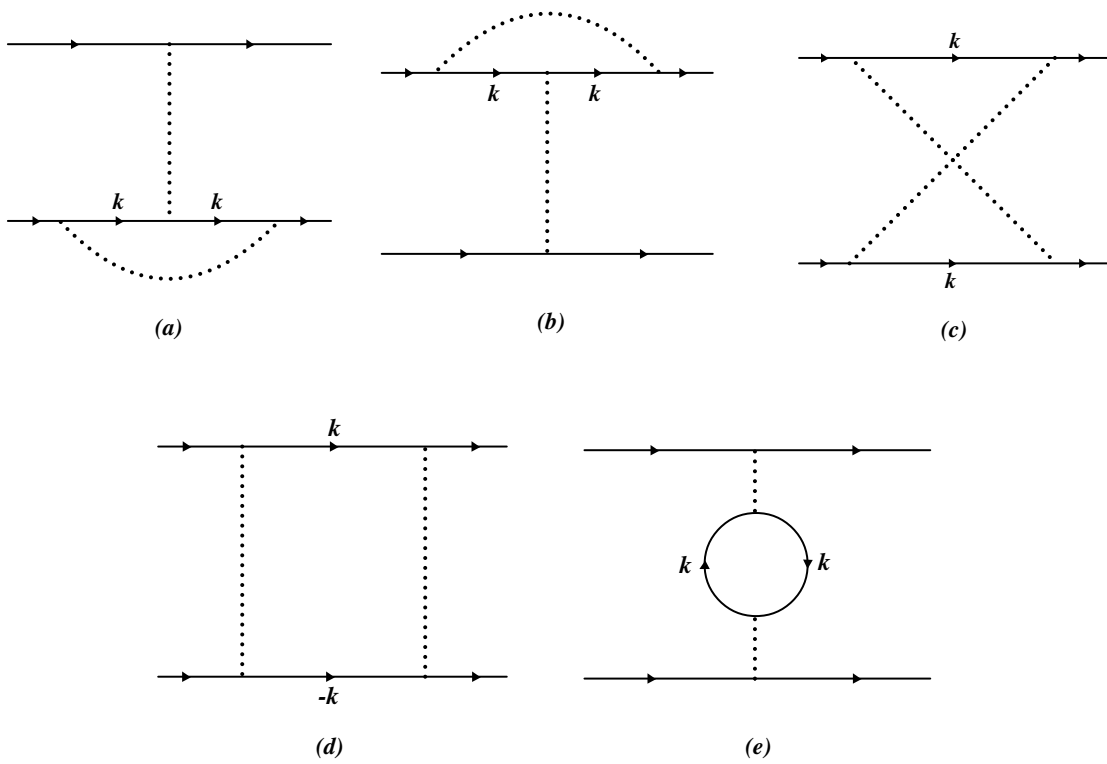


Figura C.7: Diagrama de quatro pontos com dois vértices Quiral.

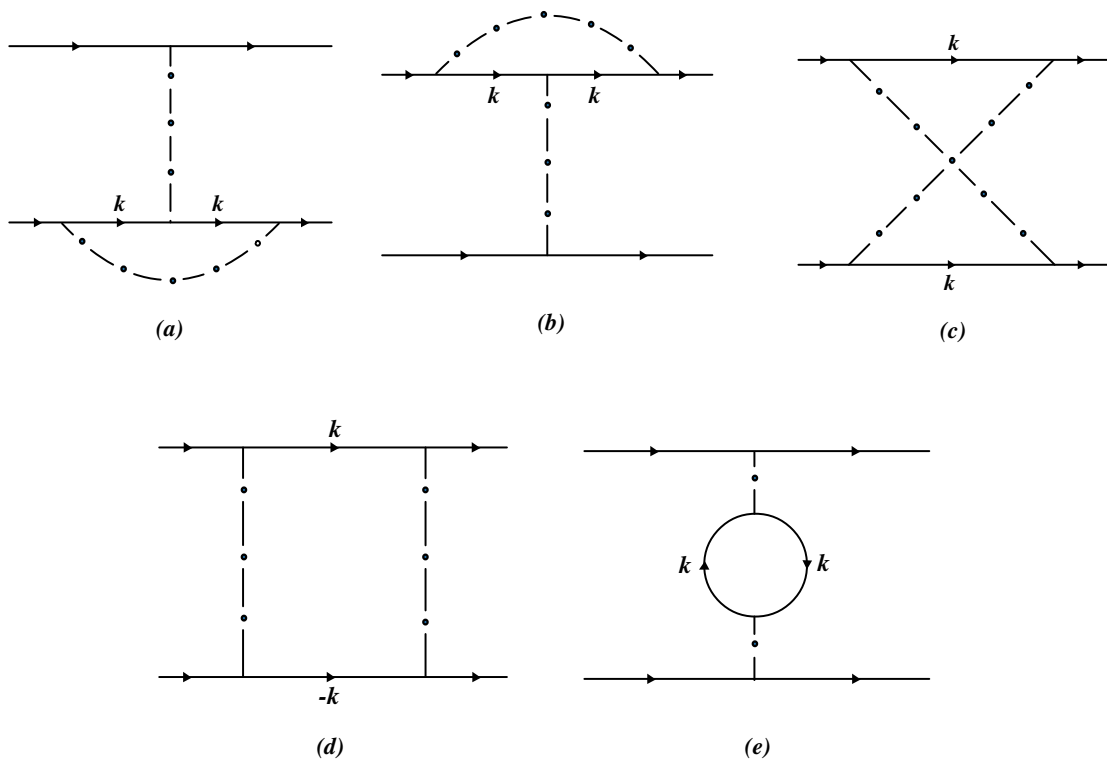


Figura C.8: Diagrama de quatro pontos com dois vértices Axial.

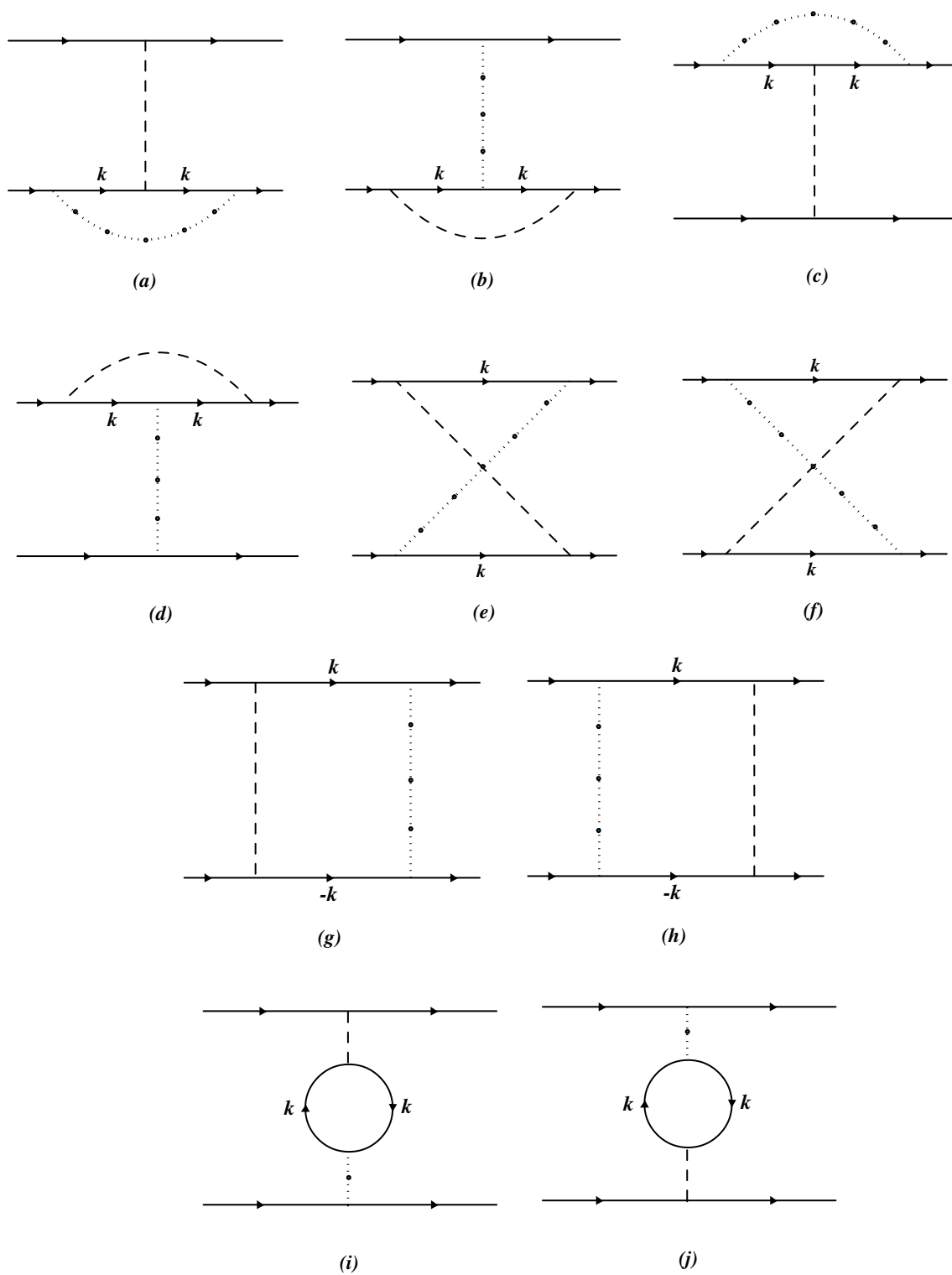


Figura C.9: Diagrama de quatro pontos com vértices Gross-Neveu-Thirring.

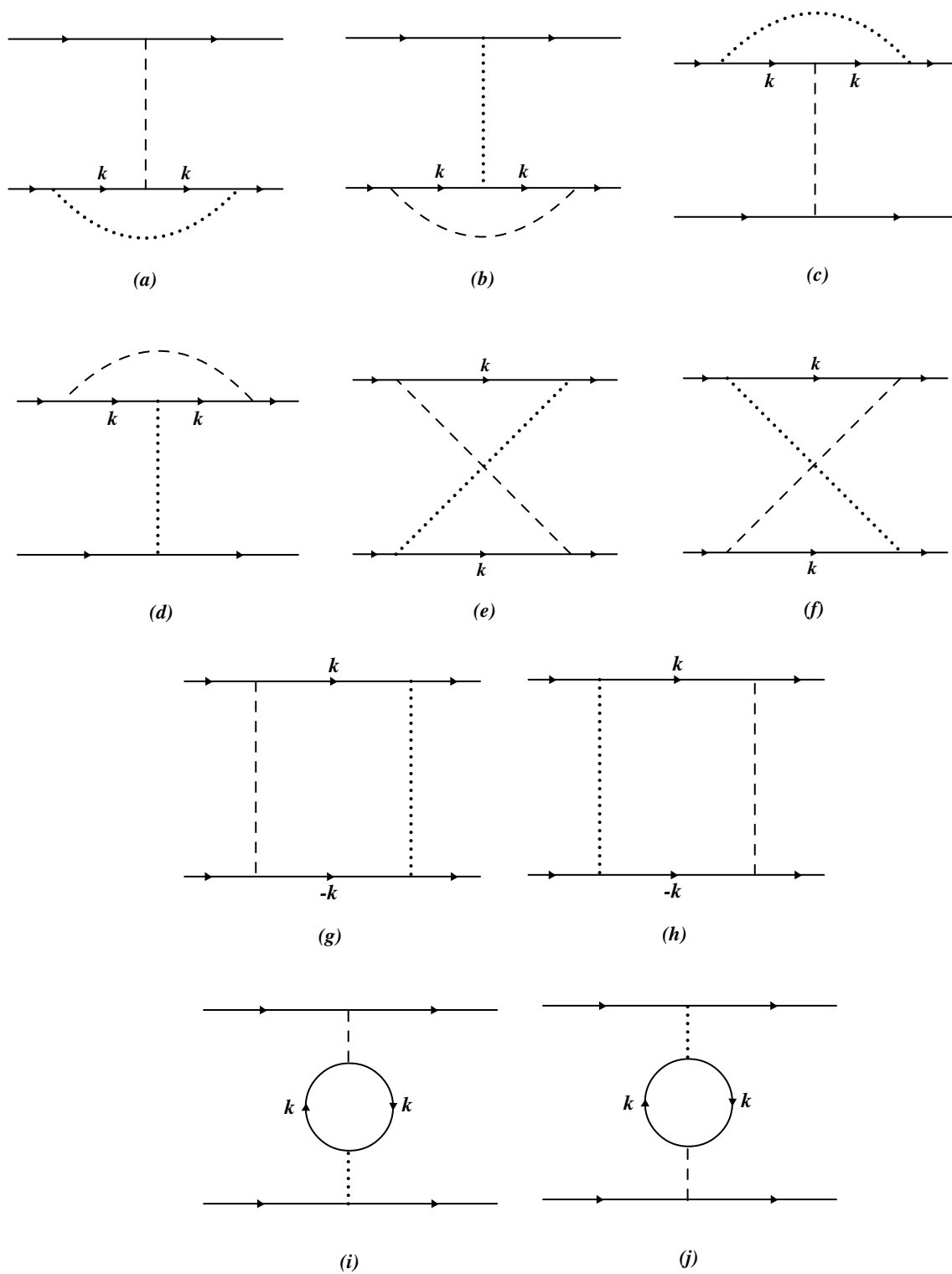


Figura C.10: Diagrama de quatro pontos com vértices Gross-Neveu-Quiral.

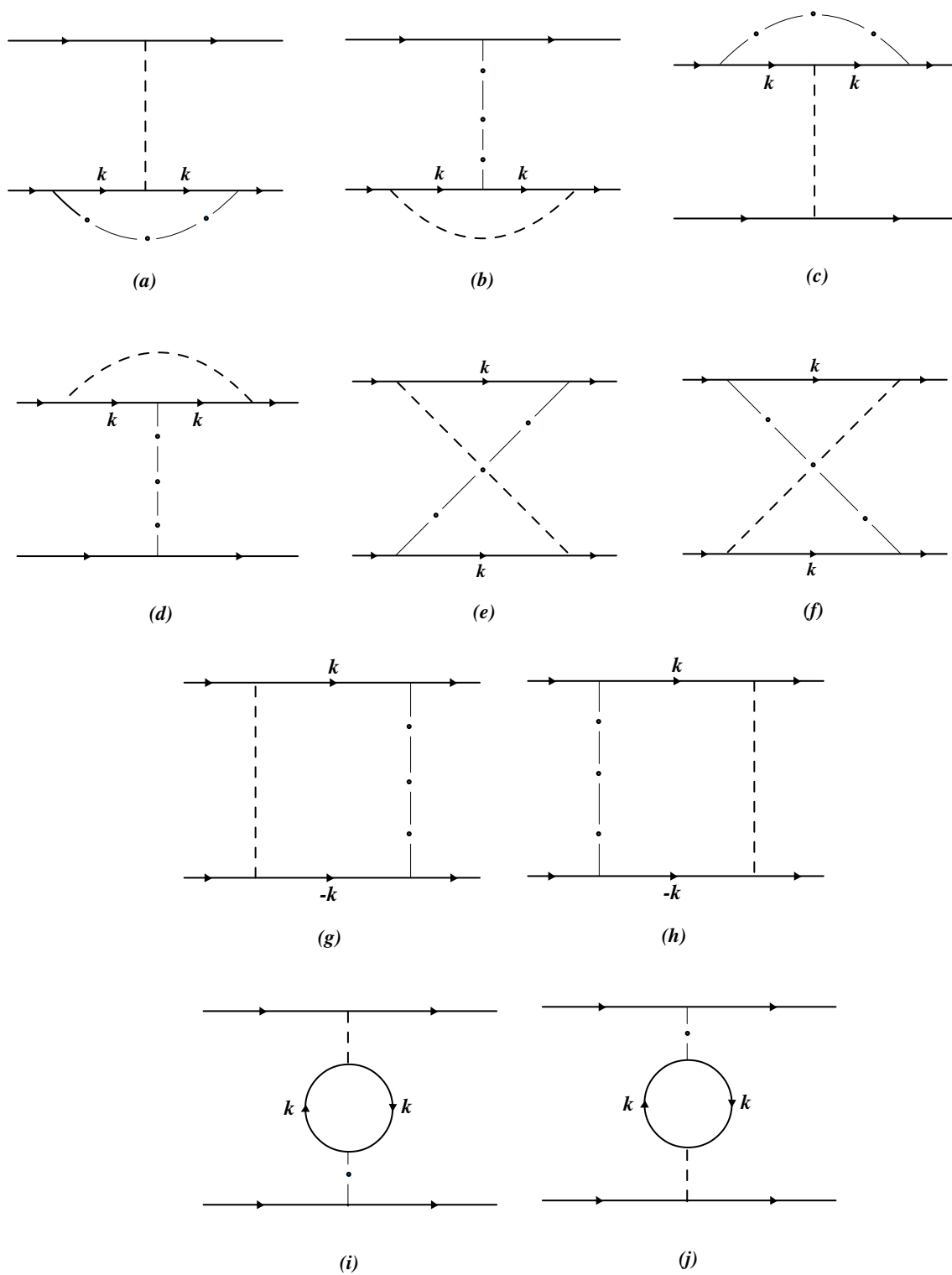


Figura C.11: Diagrama de quatro pontos com vértices Gross-Neveu-Axial.

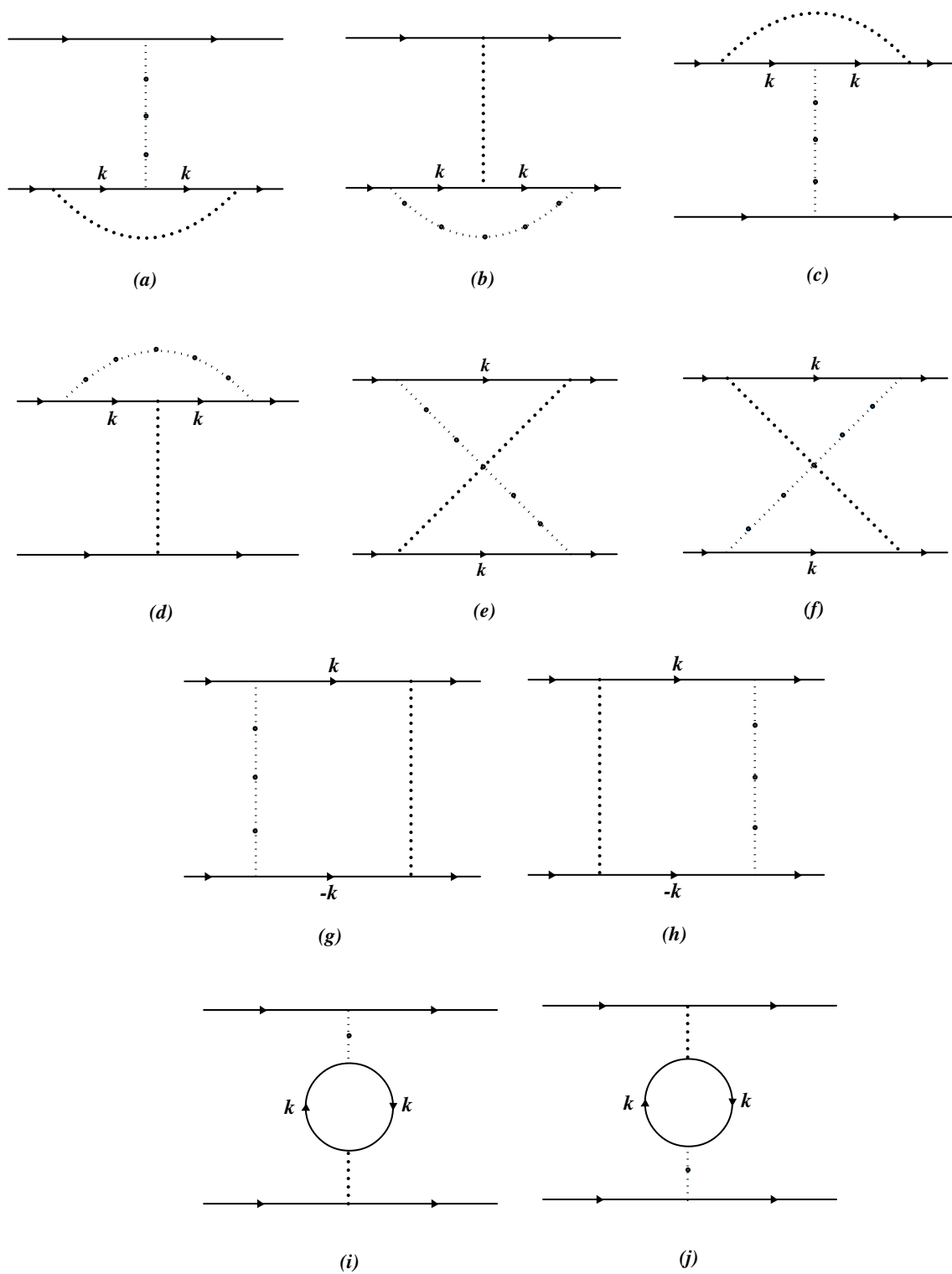


Figura C.12: Diagrama de quatro pontos com vértices Thirring-Quiral.

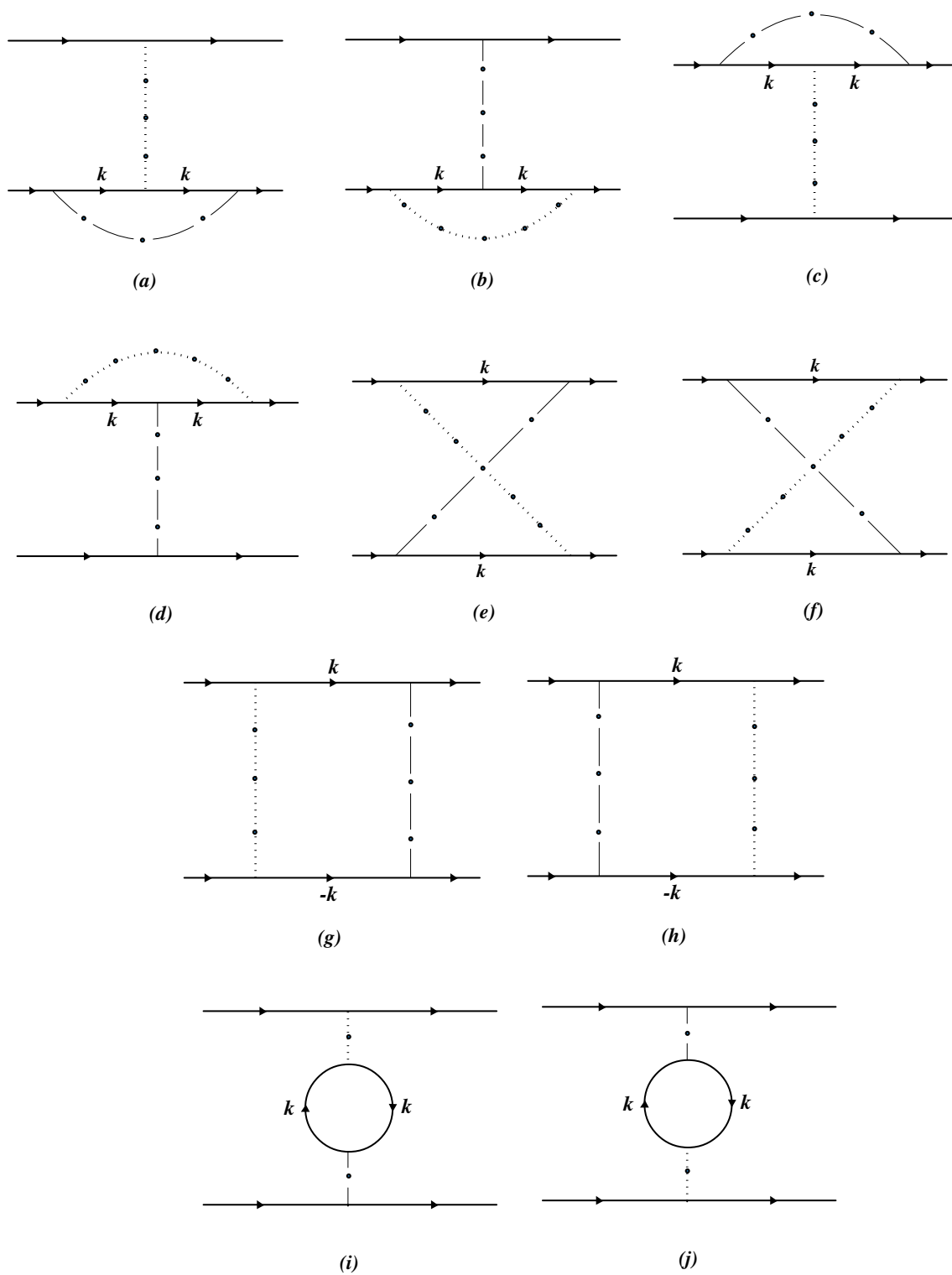


Figura C.13: Diagrama de quatro pontos com vértices Thirring-Axial.

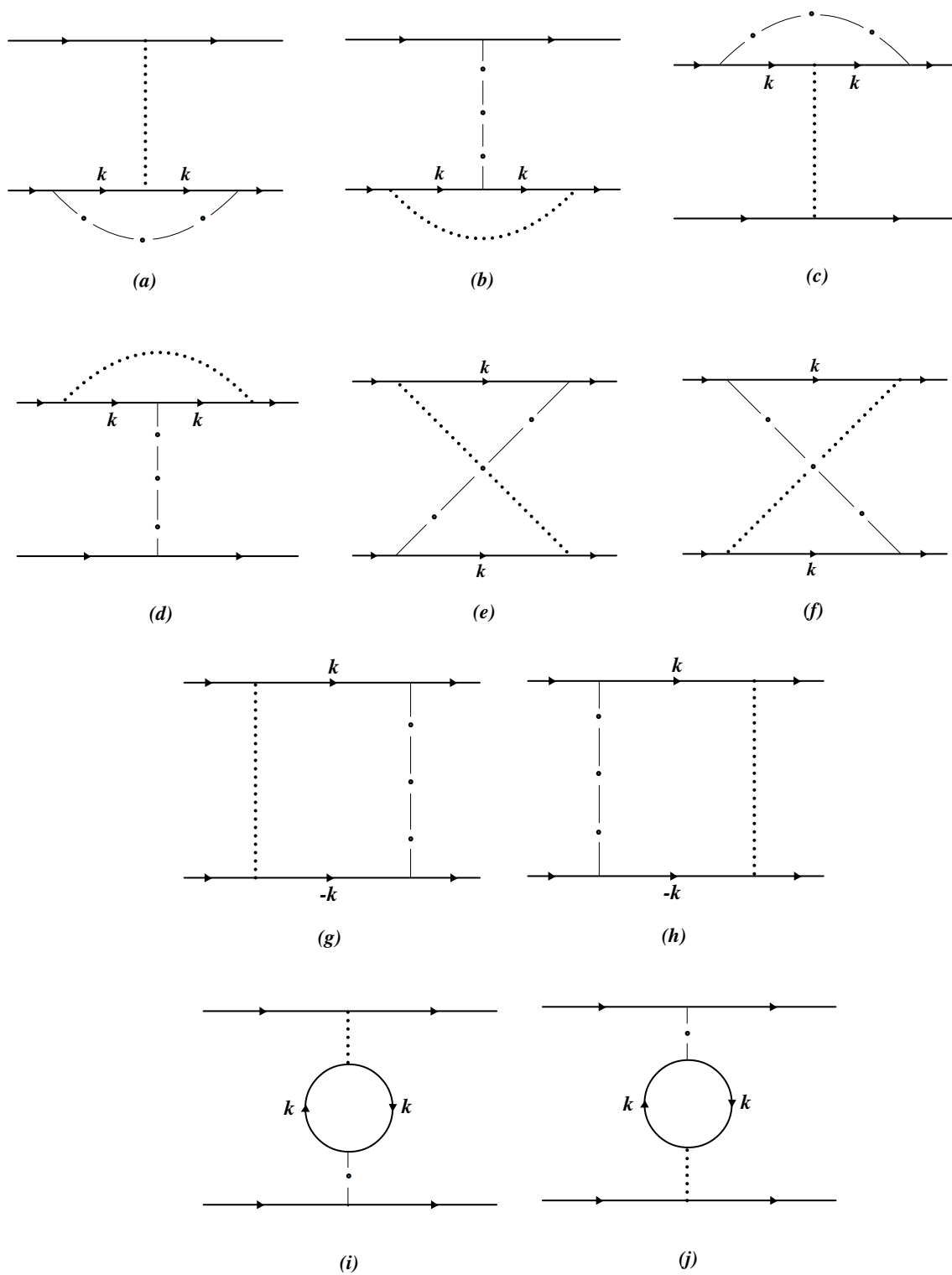


Figura C.14: Diagrama de quatro pontos com vértices Quiral-Axial.

Referências Bibliográficas

- [1] M. O. C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos*, Editora da Universidade de São Paulo, 2002.
- [2] J. R. Oppenheimer, *Note on the theory of the interaction of field and matter*, Phys. Rev. **35**, p. 461-77 (1930).
- [3] V. A. Bezerra, *Racionalidade, consistência, reticulação e coerência: o caso da renormalização na Teoria Quântica do Campo*, Scientle Studia, Volume 1, No.2, p.151-81, 2003.
- [4] H. A. Bethe, *The electromagnetic shift of energy levels*, Phys. Rev. **72**, p. 339-41, 1947.
- [5] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, 1995.
- [6] J. Schwinger, *Quantum electrodynamics: A covariant formulation*, Phys. Rev. **74**, p. 1439-61, 1948; J. Schwinger, *Quantum electrodynamics: Vacuum polarization and self energy*, Phys. Rev. **75**, p. 651-79, 1949; J. Schwinger, *Quantum electrodynamics: The electromagnetic properties of the electron: Radiative corrections to scattering*, Phys. Rev. **76**, p. 790-817, 1949.
- [7] R. P. Feynman, *A relativistic cut-off for classical electrodynamics*, Phys. Rev. **74**, p. 939-46, 1948; R. P. Feynman, *Relativistic cut-off for quantum electrodynamics*, Phys. Rev. **74**, p. 1430-8, 1948; R. P. Feynman, *Space-time approach to quantum electrodynamics*, Phys. Rev. **76**, p. 769-89, 1949.
- [8] W. E. Lamb and R. C. Retherford, *Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method*, Phys. Rev. **72**, p. 241-3, 1947.
- [9] S. Tomonaga, *On a relativistically invariant formulation of the quantum theory of wave fields*, Progress of Theoretical Physics, 1, 2, p. 27-42, 1946.
- [10] F. J. Dyson, *The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman*, Phys. Rev. **75**, p. 486-502, 1949.
- [11] G. P. Lepage, *What is Renormalization?*, Proceedings of TASI-89, 1989.

- [12] M. Kaku, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford University Press, 1993.
- [13] A. Pich, *Effective Field Theory*, hep-ph/9806303v1, 1998.
- [14] D. B. Kaplan, *Effective Field Theories*, nuelc-th/9506035v1, 1995.
- [15] S. Hartmann, *Effective Field Theories, Reductionism and Scientific Explanation*, Hist. Phil. Mod. Phys., Vol.32, No.2, pp. 267-304, 2001.
- [16] A. V. Manohar, *Effective Field Theories*, hep-ph/9508245v1, 1995.
- [17] J. Polchinski, *Effective Field Theory and The Fermi Surface*, hep-th/9210046v2, 1999.
- [18] Y. Nambu, in *Preludes in Theoretical Physics, in honor of V. F. Weisskopf*, North-Holland, Amsterdam, 1966.
- [19] W. Marciano and H. Pagels, Phys. Rep. **36**, 137 (1978).
- [20] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapore, 1987.
- [21] T. Hatsuda and T. Kunihiro, *QCD Phenomenology based on a Chiral Effective Lagrangian*, Phys. Rep. **247**, 221 (1994).
- [22] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on Analogy with Superconductivity*, Phys. Rev. **122** (1961) 345; Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on Analogy with Superconductivity II*, Phys. Rev. **124** (1961) 246.
- [23] A. Barducci, R. Casalbuoni, M. Modugno, G. Pettini and R. Gatto, *1/N_c expansion for the partition function in four fermion models*, hep-ph/ 9603358v1, 1996.
- [24] S. P. Klevanky, *The Nambu-Jona-Lasinio model of cromodynamics*, Rev. Mod. Phys. 64, 649 (1992).
- [25] M. Buballa, Phys. Rep. **407**, 205 (2005).
- [26] D. K. Kim, Y. D. Han and I. G. Koh, *Chiral symmetry breaking in a finite volume*, Phys. Rev. **D49**, 6943 (1994).
- [27] J. B. Kogut and C. G. Strouthos, *Chiral symmetry restoration in the three-dimensional four-fermion model at nonzero temperature and density*, Phys. Rev. **D63**, 054502 (2001).
- [28] O. Kiriyaama, T. Kodama and T. Koide, *Finite-size effects on the QCD phase diagram*, hep-ph/0602086v1, 2006.

- [29] L. M. Abreu, M. Gomes and A. J. da Silva, *Finite-size Effects on the Phase Structure of the Nambu-Jona-Lasinio Model*, Phys. Lett. **B642**, 551 (2006).
- [30] S. Coleman, *Aspect of Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).
- [31] David J. Gross, *Applications of the Renormalization Group to High-Energy Physics*, Proceedings of Lês Houches, Session XXVIII, 1975, edited by Roger Balian and Jean Zinn-Justin, North-Holland Publishing Co, 1976; G. Parisi, Nucl. Phys. **B100**, 368 (1975); B. Rosenstein, B. J. Warr and S. H. Park, *Four-Fermions Theory is Renormalizable in 2 + 1 Dimensions*, Phys. Rev. Lett. **62**, 1433 (1989).
- [32] M. Gomes, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, *Dynamical parity violation and the Chern-Simons term*, Phys. Rev. **D41**, 1363 (1990); M. Gomes, R. S. Mendes, R. F. Ribeiro and A. J. da Silva, *Gauge structure, anomalies, and mass generation in a three-dimensional Thirring model*, Phys. Rev. **D43**, 3516.
- [33] J. Kubo and M. Nunami, *Unrenormalizable Theories can be predictive*, hep-th/0112032v2, 2002.
- [34] Van Sérgio Alves, *Análise Perturbativa de Campos Fermiônicos com Auto-Interação Quártica Acoplada a um Campo de Chern-Simons*, Tese de Doutorado, IFUSP (1998).
- [35] P. G. Hewitt, *Física Conceitual*, Bookman, 2002.
- [36] B. Van den Bossche, *The Three flavor A scaled Nambu-Jona-Lasinio model*, nucl-th/9807010v1, 1998.
- [37] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1996.
- [38] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1985.
- [39] T. P. Cheng and L. F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford University Press, 1984.
- [40] S. Weinberg, *New Approach to the Renormalization Group*, Phys. Rev. **D8**, 3497 (1973);
- [41] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, *Lowest order divergent graphs in nu-dimensional space*, Phys. Lett. **B40**, 566 (1972); G. t'Hooft and M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972); J. F. Ashmore, *A Method of Gauge Invariant Regularization*, Lett. Novo Cimento 4, 289 (1972).
- [42] A. V. Manohar, *Heavy quark effective theory and nonrelativistic QCD Lagrangian to order a_s/m^3* , Phys. Rev. **D56**, 230 (1997);

- [43] G. t'Hooft, Nucl. Phys. Rev. **D56**, 230 (1997).
- [44] V. S. Alves, M. Gomes, S. V. L. Pinheiro and A. J. da Silva, *Perturbative Gross-Neveu model coupled to a Chern-Simons field: A renormalization group study*, Phys. Rev. **D59**, 045002 (1998).
- [45] W. Zimmermann, Commum. Math. Phys. 97, 211 (1985); R. Oehme, K. Sibold and W. Zimmermann, *Renormalization Group Equations With Vanishing Lowest Order Of The Primary Beta Function*, Phys. Lett. **B147**, 115 (1984); R. Oehme and W. Zimmermann, Commum. Math. Phys. 97, 569 (1985); R. Oehme, *Reduction of Coupling Parameters*, hep-th/9511006, 1995.
- [46] L. A. W. Toro, Z. Phys. C 56, 635 (1992); M. Atance and J. L. Cortes, *Effective Field Theory of Gravity, Reduction of Coupling and the Renormalization Group*, Phys. Rev. D54 (1996) 4973 e hep-ph/9605455; M. Atance and J. L. Cortes, *Effective scalar Field Theory and Reduction of Coupling*, Phts. Rev. D56 (1997) 3611 e hep-ph/9612324; K. Helpert and K. Huang, *Fixed-Point Structure of Scalar Fields*, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 3526 e hep-th/9406199; D. Anselmi, *Infinite Reduction of Coupling in Non-Renormalizable Quantum Field Theory*, JHEP 08 (2005) 029 e hep-th/0503131; D. Anselmi, *Renormalization of a Class of Non-Renormalizable Theories*, JHEP 07 (2005) 077 e hep-th/0502237.
- [47] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [48] L. O. Nascimento and Van Sérgio Alves, *Beta function in the sector invariant quiral of Nambu-Jona-Lasinio Model in $(3 + 1)D$* , Amazonian Symposium on Physics, UFPA, 2008; L. O. Nascimento e Van Sérgio Alves, *As funções do Grupo de Renormalização no setor invariante quiral do modelo de Nambu-Jona-Lasinio em $(3 + 1)D$* , XXIX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, São Lourenço/MG, 2008; L. O. Nascimento e Van Sérgio Alves, *As funções do Grupo de Renormalização no modelo de Nambu-Jona-Lasinio em $(3 + 1)D$* , III Semana de Pós-Graduação em Física, UFPA, 2008.